

מודלים חישוביים

תרגול מס' 1

3 במרץ 2016

נושאי התרגול:

- אותיות, מילים ושפות.
- אוטומט סופי דטרמיניסטי (DFA).

1 אותיות, מילים ושפות

- אות הינה סימן כלשהו. לדוגמא: $\sigma = \$$ או $\delta = a$.
- אלפבית (א"ב) הינו קבוצה סופית לא ריקה של אותיות. לדוגמא: $\Sigma = \{0, 1\}$ או $\Delta = \{a, b, c\}$.
- מילה מעל א"ב Σ הינה סדרה סופית של אותיות מ- Σ . לדוגמא: $w = abbbca$ היא מילה מעל $\Sigma = \{a, b, c\}$. נסמן ב- ϵ את המילה הריקה. אורך של מילה, $|w|$, הוא מספר האותיות בה.
- שפה הינה קבוצה סופית או אינסופית של מילים מעל א"ב נתון. דוגמאות מעל הא"ב $\Sigma = \{0, 1\}$:

$$L_1 = \{\epsilon, 00, 11, 010\} -$$

$$L_2 = \emptyset -$$

$$L_3 = \{\epsilon, 0, 00, 000, \dots\} -$$

- מסמנים את שפת כל המילים מעל הא"ב Σ ב- Σ^* . אם כך, קבוצת כל השפות היא $\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

פעולות על מילים:

- שרשור - הדבקת מילים אחת אחרי השנייה. השרשור של w_1 ו- w_2 יסומן פשוט כ- w_1w_2 .
- חזקה - חזקה i של מילה w היא המילה המתקבלת משרשור w לעצמה i פעמים. נוכל אם כך לכתוב:
 $L_3 = \{0^i \mid i \geq 0\}$
- היפוך - הפיכת סדר האותיות במילה. ההיפוך של w יסומן כ- w^R .

פעולות על שפות:

- משלים - עבור שפה L , $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$. דוגמא: עבור א"ב $\Sigma = \{a, b\}$ ו- $L_4 = \{aw \mid w \in \Sigma^*\}$
 $\bar{L}_4 = \{bw \mid w \in \Sigma^*\} \cup \{\epsilon\}$
- שרשור - עבור שתי שפות A_1, A_2 נגדיר $A_1 \cdot A_2 = \{w_1w_2 \mid w_1 \in A_1 \wedge w_2 \in A_2\}$. דוגמא: עבור א"ב $\Sigma = \{0, 1\}$ ו- $A_1 = \{0^{2i} \mid i \geq 0\}$, $A_2 = \{1^{3j} \mid j \geq 0\}$, $A_1 \cdot A_2 = \{0^{2i}1^{3j} \mid i, j \geq 0\}$. בדומה נגדיר חזקה. באופן דומה לחזקה של מילים, נגדיר גם חזקה של שפות.
- איחוד וחיתוך - עבור שתי שפות A_1, A_2 נגדיר $A_1 \cup A_2 = \{w \mid w \in A_1 \vee w \in A_2\}$ ובדומה נגדיר חיתוך.

• סגור קליני - כל המילים שניתן ליצור משרשור מילים בשפה. עבור שפה L , נסמן:

$$L^* = \{w_1 w_2 \dots w_k \mid \forall i. w_i \in L\} = \bigcup_{k \geq 0} L^k$$

- לכל $L, \epsilon \in L^*$

- שני המקרים היחידים שהסגור יחזיר קבוצה סופית: $\{\epsilon\}^* = \emptyset^* = \{\epsilon\}$

- עבור $L = \{00000, 000\}$, $L^* = \{0^{5i+3j} \mid i, j \geq 0\}$

1 תרגיל

הוכיחו/הפריכו:

1. לכל שלוש שפות L_1, L_2, L_3 מתקיים ש- $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cap (L_2 \cdot L_3)$

2. $u \in L_1 \wedge v \in L_2$ אם $uv \in L_1 \circ L_2$

פתרון

1. הטענה לא נכונה (הוכיח לבד כי אם היינו מחליפים את החיתוך באיחוד אז הטענה דווקא כן היתה נכונה). נבחר $\Sigma = \{a\}$, $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{aa\}$, $L_3 = \{\epsilon, a\}$ אזי,

$$\begin{aligned} (L_1 \cap L_2) \cdot L_3 &= \emptyset \cdot L_3 = \emptyset \\ (L_1 \cdot L_3) \cap (L_2 \cdot L_3) &= \{a, aa\} \cap \{aa, aaa\} = \{aa\} \end{aligned}$$

2. הטענה לא נכונה. מעל אותו א"ב, נבחר $L_1 = L_2 = \{a\}$ אזי, $L_1 \cdot L_2 = \{aa\}$. נבחר $u = \epsilon$ ו- $v = aa$ אזי, $uv = aa \in L_1 \cdot L_2$ אך $u \notin L_1$ למשל.

2 אוטומט סופי דטרמיניסטי

2.1 הגדרה אס"ד הוא חמישייה $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ כך ש:

- Q הינה קבוצה סופית של מצבים.
- Σ הינו א"ב הקלט.
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ הינה פונקצית המעברים.
- $q_0 \in Q$ מצב התחלתי (יחיד).
- $F \subseteq Q$ הינה קבוצת מצבים מקבלים.

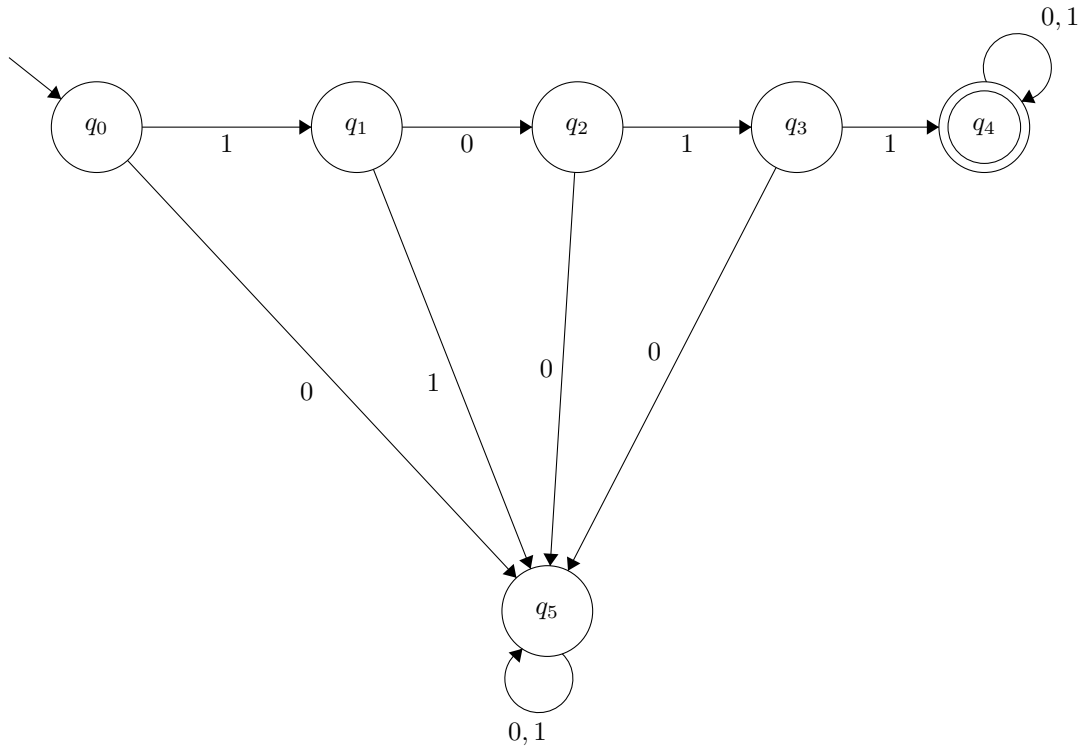
2.2 הגדרה נגיד ש- M מקבל את $w \in \Sigma^*$ אם $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$ כך ש- $\hat{\delta}$ היא פונקצית המעברים המורחבת שהגדרנו בהרצאות.

2.3 הגדרה תהא A קבוצת המילים ש- M מקבל. נסמן: $L(M) = A$ כשפה ש- M מקבל (או, מזהה).

2.4 הגדרה שפה L היא רגולרית אם קיים אס"ד המקבל אותה.

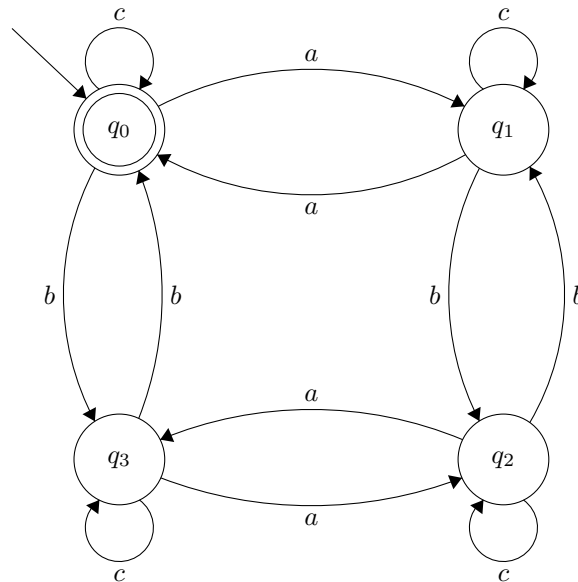
דוגמא 1

אס"ד מעל הא"ב $\Sigma = \{0, 1\}$ המקבל את שפת כל המילים המתחילות ב-1011.



דוגמא 2

אס"ד מעל הא"ב $\Sigma = \{a, b, c\}$ המקבל את השפה $L = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \text{ is even} \wedge \#_b(w) \text{ is even}\}$.



נשים לב שבהגיענו ל- q_1 ראינו מספר א"ז של a -ים ומספר זוגי של b -ים, בהגיענו ל- q_2 ראינו מספר א"ז של a -ים ו- b -ים ובהגיענו ל- q_3 ראינו מספר זוגי של a -ים ומספר א"ז של b -ים.

דוגמא 3

תיאור פורמלי לאס"ד מעל הא"ב $\{0, 1\}$ המקבל את שפת כל המילים המסתיימות ב-00:

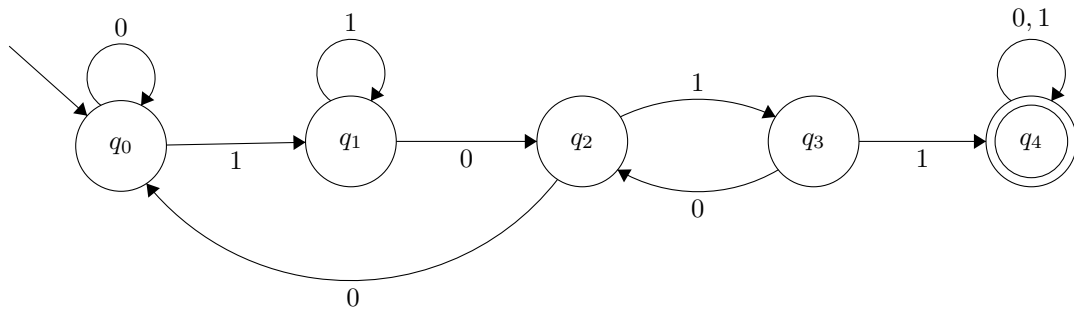
$$\begin{aligned} M &= (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \\ &= (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\}) \end{aligned}$$

כך ש- δ מוגדרת כך:

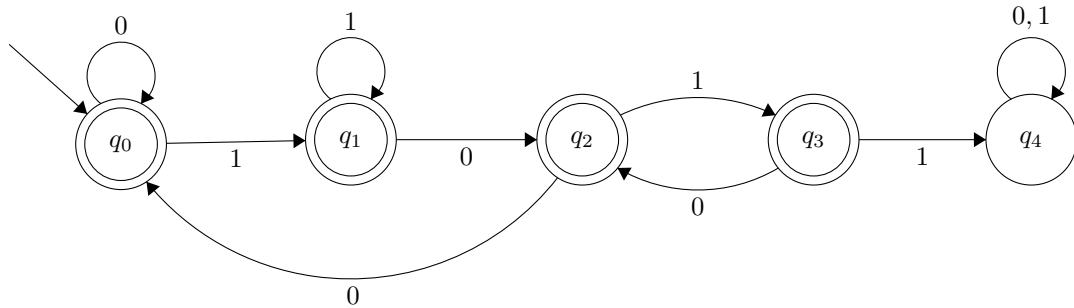
$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0) &= q_1 & \delta(q_0, 1) &= q_0 \\ \delta(q_1, 0) &= q_2 & \delta(q_1, 1) &= q_0 \\ \delta(q_2, 0) &= q_2 & \delta(q_2, 1) &= q_0 \end{aligned}$$

דוגמא 4

נראה כי שפת כל המילים מעל הא"ב $\{0, 1\}$ שלא מכילות 1011 היא רגולרית. נבנה תחילה אוטומט לשפה המשלימה - שפת כל המילים מעל הא"ב $\{0, 1\}$ שמכילות 1011:



קצת נשים לב שהשפה המשלימה מתקבלת ע"י היפוך המצבים המקבלים. במקרה שלנו:



תרגיל 2

הוכיחו כי שפות רגולריות סגורות תחת משלים.

פתרון

זוהי טענה פורמלית של מה שכבר ראינו בדוגמא הקודמת. תהא L שפה רגולרית. אזי, קיים אס"ד $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ כך ש- $L(M) = L$. נגדיר M' כך:

$$M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$$

ומתקיים ש:

$$w \in \bar{L} \Leftrightarrow w \notin L \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \notin F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \in Q \setminus F \Leftrightarrow w \in L(M')$$

ולכן $L(M') = \bar{L}$, כנדרש (שימו לב שהוכחנו בעצם הכלה דו-כיוונית).

תרגיל 3

הוכיחו כי שפות רגולריות סגורות תחת חיתוך.

פתרון

יהיו L_1, L_2 שפות רגולריות. אזי, קיימים אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים

$$M_1 = (Q^1, \Sigma, \delta^1, q_0^1, F^1)$$

$$M_2 = (Q^2, \Sigma, \delta^2, q_0^2, F^2)$$

כך ש- $L(M_1) = L_1$ ו- $L(M_2) = L_2$. נרצה לבנות אס"ד $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ כך ש- $L(M) = L_1 \cap L_2$. באופן לא פורמלי, M יסמלץ "ריצה במקביל" על M_1 ו- M_2 ויקבל אם הגענו למצב מקבל בשני האוטומטים גם יחד. פורמלית:

$$\bullet Q = Q^1 \times Q^2$$

$$\bullet q_0 = (q_0^1, q_0^2)$$

$$\bullet \delta((q_1, q_2), \sigma) = (\delta^1(q_1, \sigma), \delta^2(q_2, \sigma)), q_1 \in Q^1, q_2 \in Q^2, \sigma \in \Sigma$$

$$\bullet F = F^1 \times F^2 = \{(q_1, q_2) \mid q_1 \in F^1 \wedge q_2 \in F^2\}$$

נוכיח תחילה טענת עזר:

$$\text{טענה 2.5} \quad \hat{\delta}((q_1, q_2), w) = (\hat{\delta}^1(q_1, w), \hat{\delta}^2(q_2, w)), (q_1, q_2) \in Q \text{ ו- } w \in \Sigma^*$$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על $|w|$. עבור $|w| = 0$, כלומר $w = \epsilon$, מתקיים ש-

$$\hat{\delta}((q_1, q_2), w) = (q_1, q_2) = (\hat{\delta}^1(q_1, w), \hat{\delta}^2(q_2, w))$$

נניח את נכונות הטענה עבור $|w| < n$ ותהא $w = u\sigma$ כך ש- $|u| = n$. אזי:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}((q_1, q_2), w) &= \hat{\delta}((q_1, q_2), u\sigma) \\ &= \delta(\hat{\delta}((q_1, q_2), u), \sigma) \\ &= \delta((\hat{\delta}^1(q_1, u), \hat{\delta}^2(q_2, u)), \sigma) \\ &= (\delta^1(\hat{\delta}^1(q_1, u), \sigma), \delta^2(\hat{\delta}^2(q_2, u), \sigma)) \\ &= (\hat{\delta}^1(q_1, w), \hat{\delta}^2(q_2, w)) \end{aligned}$$

■

כעת נחזור להוכחת הטענה המקורית, ש- $L(M) = L_1 \cap L_2$:

$$\begin{aligned} w \in L(M) &\Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \in F \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}((q_0^1, q_0^2), w) \in F \\ &\Leftrightarrow (\hat{\delta}^1(q_0^1, w), \hat{\delta}^2(q_0^2, w)) \in F^1 \times F^2 \\ &\Leftrightarrow (\hat{\delta}^1(q_0^1, w) \in F^1) \wedge (\hat{\delta}^2(q_0^2, w) \in F^2) \\ &\Leftrightarrow w \in L(M_1) \wedge w \in L(M_2) \\ &\Leftrightarrow w \in L(M_1) \cap L(M_2) \\ &\Leftrightarrow w \in L_1 \cap L_2 \end{aligned}$$

וסיימנו. הוכחה חלופית תוך שימוש בסגירות שפות רגולריות לאיחוד ומשלים - שימוש בדה-מורגן: $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.