מודלים חישוביים
תרגול מס' 10

17 במאי 2016

נושאי התרגול:

- משפט Rice ועוד רדוקציות.

1 משפט Rice ועוד רדוקציות

נזכיר את משפט Rice:

משפט 1.1 תהא C תת קבוצה לא טריוויאלית של RE ותהא $L_C = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in C\}$. אזי, $L_C \notin \mathrm{R}$.

מתי C היא תכונה (או, תת קבוצה) לא טריוויאלית? אם קיימות L_1 ו־ L_2 כך ש־ $L_1 \in C$ ו־ $L_2 \notin C$. שימו לב שהתכונה צריכה להיות תכונה של <u>שפות</u>. כלומר, אם $L(M_1) = L(M_2)$ אז $M_1, M_2 \in L_C$ או $M_1, M_2 \notin L_C$. אם כך, עבור הדוגמאות הבאות, האם ניתן להשתמש במשפט רייס?

- עבור השפה $\{\langle M\rangle \mid L(M) \in \mathrm{RE}\}$? לא, כי התכונה טריוויאלית (וגם השפה ב־ R).
- עבור השפה $A_{TM,\epsilon} = \{\langle M\rangle \mid \epsilon \in L(M)\}$? כן, $A_{TM,\epsilon}$. התכונה היא $C = \{L \in \mathrm{RE} \mid \epsilon \in L\}$. זוהי אינה תכונה טריוויאלית, שכן $\emptyset \notin C$ אך $\Sigma^\star \in C$.
- עבור השפה $\{\langle M\rangle \mid M \text{ halts on } 101\}$? לא, כי זו אינה תכונה של שפות.
- עבור השפה $\{\langle M\rangle \mid M \text{ accepts } 101\}$? כן, זוהי תכונה לא טריוויאלית של שפות.
- עבור השפה $\{\langle M\rangle \mid M \text{ always halts}\}$? לא, כי זו אינה תכונה של שפות (למשל, ישנן שתי מ"ט M_1, M_2 כך ש־ $L(M_1) = L(M_2) = \emptyset$ אך אחת עוצרת והשנייה לא).

תרגיל 1

הוכיחו כי $L_{\mathrm{R}} = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in \mathrm{R}\} \notin \mathrm{R}$.

פתרון

נזכור כי

$$H_{TM} = \{\langle M\rangle, w \mid M \text{ is a TM that halts on } w\} \in \mathrm{RE}\backslash\mathrm{R}$$

אם כך, נגדיר את התכונה $C = \{L \subseteq \Sigma^\star \mid L \in \mathrm{R}\}$. C אינה טריוויאלית, כי $H_{TM} \notin C$ ו־ $\Sigma^\star \in C$. לכן, לפי משפט רייס:

$$L_C = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in C\} = L_{\mathrm{R}} \notin \mathrm{R}$$

תרגיל 2

הוכיחו כי $L_{\mathrm{R}} \notin \mathrm{coRE}$.

פתרון

תהא M_ϵ שעל קלט $\langle M\rangle$ מסמלצת את M על ϵ ועונה כמוהה. נראה כי $H_{TM} \le_m L_{\mathrm{R}}$. נרצה למצוא פונקציה חשיבה $f(\langle M\rangle, w) = M'$ כך ש- M עוצרת על w אם"ם $L(M') \in \mathrm{R}$. M' על קלט x:

1. מריצה את M על w למשך $|x|$ צעדים.
2. אם M עצרה אז M' דוחה.
3. אם M לא עצרה, הרץ את M_ϵ על x ואם M_ϵ עצרה, M' תענה כמוהה.

נכונות:

- f חשיבה.
- אם M עוצרת על w אזי קיים k כך ש- M עוצרת על w תוך k צעדים. אזי, לכל x כך ש- $|x| \ge k$, M' דוחה את x. מכאן, ש- $L(M')$ סופית ו- $L(M') \in \mathrm{R}$.
- אם M לא עוצרת על w אז $L(M') = L(M_\epsilon)$. מכיוון שידוע ש- $L(M_\epsilon) = A_{TM,\epsilon} \notin \mathrm{R}$, הרי ש- $L(M') \notin \mathrm{R}$.

תרגיל 3

הוכיחו כי $L = \{\langle M\rangle \mid L(M) \text{ is a CFL}\} \notin \mathrm{RE} \cup \mathrm{coRE}$.

פתרון

נראה כי $H_{TM} \le_m L$ (ואז $L \notin \mathrm{coRE}$) ו- $\overline{H_{TM}} \le_m L$ (ואז $L \notin \mathrm{RE}$).

הכיוון $H_{TM} \le_m L$ תהא M_{abc} מ"ט המכריעה את השפה $\{a^n b^n c^n \mid n \ge 0\} \in \mathrm{R}$. נרצה למצוא פונקציה חשיבה $f(\langle M\rangle, w) = M'$ כך ש- M עוצרת על w אם"ם $L(M')$ היא שפה ח"ה. M' על קלט x:

1. מריצה את M על w למשך $|x|$ צעדים.
2. אם M עצרה אז M' דוחה.
3. אם M לא עצרה, הרץ את M_{abc} על x ו- M' תענה כמוהה.

נכונות:

- f חשיבה.
- אם M עוצרת על w אז קיים k כך שלכל $|x| \ge k$, M' תדחה את x. מכאן, ש- $L(M')$ סופית ובפרט חסרת הקשר.
- אם M לא עוצרת על w אזי $L(M') = \{a^n b^n c^n \mid n \ge 0\}$, שאינה ח"ה.

שימו לב שהנחנו כי הא"ב מכיל את $\{a, b, c\}$. זו כמובן אינה הנחה מגבילה, שכן ניתן לקחת כל שפה שאינה ח"ה מעל הא"ב שנרצה.

הכיוון $\overline{H_{TM}} \le_m L$ נרצה למצוא פונקציה חשיבה $g(\langle M\rangle, w) = M'$ כך ש- M לא עוצרת על w אם"ם $L(M')$ היא שפה ח"ה. M' על קלט x:

1. מריצה את M על w.
2. אם M עוצרת אז M' מריצה את M_{abc} על x ועונה כמוהה.

נכונות:

- g חשיבה.
- אם M לא עוצרת על w אזי $L(M') = \emptyset$, שהיא חסרת הקשר.
- אם M עוצרת על w אזי $L(M') = \{a^n b^n c^n \mid n \ge 0\}$, שאינה ח"ה.

תרגיל 4

נזכור כי עבור שפה L, $Reverse\left(L\right)=\left\{ w^{R}\mid w\in L\right\}$. הוכיחו כי $\mathrm{RE}\backslash\mathrm{R}$ סגורה תחת $Reverse$.

פתרון

תהא $L\in\mathrm{RE}\backslash\mathrm{R}$. נראה:

1. $L^{R}\in\mathrm{RE}$. ידוע כי $L\in\mathrm{RE}$ ולכן קיימת מ"ט M המקבלת את L. נגדיר מ"ט M^{R} שעל קלט x מריצה את M על x^{R} ועונה כמוהה. ברור כי אם $x\in L^{R}$ אזי $x^{R}\in L$ ו־ M (ולכן M^{R}) תקבל. אם $x\notin L^{R}$ אזי $x^{R}\notin L$ ו־ M (ולכן M^{R}) תדחה או לא תעצור.
2. $L^{R}\notin\mathrm{R}$. נראה כי $L^{R}\leq_{m}L$. הרדוקציה f: $f\left(w\right)=w^{R}$. אזי, $w\in L$ אם"ם $f\left(w\right)=w^{R}\in L^{R}$.

תרגיל 5

הוכיחו:

$$L_{01}=\left\{ w\mid w=0x\text{ for some }x\in A_{TM}\text{ or }w=1y\text{ for some }\ y\in\overline{A_{TM}}\right\} \notin\mathrm{RE}\cup\mathrm{coRE}$$

פתרון

נראה כי $A_{TM}\leq_{m}L$ (ואז $L\notin\mathrm{coRE}$) ו־ $\overline{A_{TM}}\leq_{m}L$ (ואז $L\notin\mathrm{RE}$).

הכיוון $A_{TM}\leq_{m}L$ נרצה למצוא פונקציה חשיבה $f\left(\left\langle M\right\rangle ,w\right)=w'$ כך ש־ M מקבלת את w אם"ם $w'\in L_{01}$. f על הקלט $\left\langle M\right\rangle ,w$ תחזיר את המחרוזת $0\left\langle M\right\rangle ,w$. נכונות:

- f חשיבה.
- אם M מקבלת את w אז $f\left(\left\langle M\right\rangle ,w\right)=0\left\langle M\right\rangle ,w\in L_{01}$.
- אם M לא מקבלת את w אז $f\left(\left\langle M\right\rangle ,w\right)=0\left\langle M\right\rangle ,w\notin L_{01}$.

הכיוון $\overline{A_{TM}}\leq_{m}L$ נרצה למצוא פונקציה חשיבה $g\left(\left\langle M\right\rangle ,w\right)=w'$ כך ש־ M לא מקבלת את w אם"ם $w'\in L_{01}$. g על הקלט $\left\langle M\right\rangle ,w$ תחזיר את המחרוזת $1\left\langle M\right\rangle ,w$. נכונות:

- g חשיבה.
- אם M לא מקבלת את w אז $g\left(\left\langle M\right\rangle ,w\right)=1\left\langle M\right\rangle ,w\in L_{01}$.
- אם M מקבלת את w אז $g\left(\left\langle M\right\rangle ,w\right)=1\left\langle M\right\rangle ,w\notin L_{01}$.

תרגיל 6

תהא:

$$L_{k}=\left\{ \left\langle M\right\rangle \mid M\text{ on }\epsilon\text{ does not use more than }k\ \text{ places on the tape}\right\}$$

ראינו תרגול שעבר ש־ $L_{100}\in\mathrm{R}$. תהא $L=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}L_{k}$. הוכיחו כי $L\notin\mathrm{R}$ (נסו להוכיח בעצמכם כי $L\in\mathrm{RE}$).

פתרון

נראה רדוקציה $H_{TM,\epsilon} \leq_m L$. נרצה למצוא פונקציה חשיבה $f(\langle M \rangle) = \langle M' \rangle$ כך ש־ M עוצרת על ϵ אם"ם $\langle M' \rangle \in L$. M' על קלט x:

1. מריצה את M על ϵ ובכל שלב של הסימולציה, M' כותבת \$ בסוף תוכן הסרט.
2. אם M עצרה, M' תענה כמוהה.

נכונות:

1. f חשיבה.
2. אם M עוצרת על ϵ אז M' משתמשת במספר סופי של תאים ולכן $\langle M' \rangle \in L$.
3. אם M לא עוצרת על ϵ אז M' משתמשת במספר אינסופי של תאים ולכן $\langle M' \rangle \notin L$.

תרגיל 7

נגדיר תכונה של שפות ב־ coRE להיות תת־קבוצה של שפות $C \subseteq \mathrm{coRE}$. כרגיל, תכונה תקרא לא טריוויאלית אם $C \neq \emptyset$ וגם $C \neq \mathrm{coRE}$. נזכיר כי $L_C = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in C\}$.

1. הוכיחו/הפריכו: עבור כל תכונה טריוויאלית C מתקיים כי $L_C \in \mathrm{R}$.
2. הוכיחו "משפט רייס" עבור coRE: תהא C תכונה של שפות ב־ coRE כך ש־ $C \cap \mathrm{R} \neq \emptyset$. אזי, $L_C \notin \mathrm{R}$.

פתרון

1. הטענה לא נכונה. נניח $C = \mathrm{coRE}$. אזי, $L_C = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \mathrm{coRE}\}$. לפי הגדרה, לכל M מתקיים ש־ $L(M) \in \mathrm{RE}$ ולכן מתקיים ש־ $L_C = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \mathrm{R}\}$. $C = \mathrm{R} \subset \mathrm{RE}$ אינה טריוויאלית לפי משפט רייס, ולכן $L_C \notin \mathrm{R}$.
2. נוכיח את המשפט:

   (א) תהא C תכונה כנ"ל. אזי, $C \cap \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}$ ובנוסף $C \cap \mathrm{R} \neq \emptyset$ ולכן נוכל לקחת את $C \cap \mathrm{R}$ כתכונה לא טריוויאלית של שפות ב־ RE.

   (ב) ממשפט רייס המקורי, $L_{C \cap \mathrm{R}} \notin \mathrm{R}$. נראה כי $L_{C \cap \mathrm{R}} = L_C$:

   i. עבור $\langle M \rangle \in L_{C \cap \mathrm{R}}$ מתקיים ש־ $L(M) \in C \cap \mathrm{R}$ ובפרט $L(M) \in C$ ולכן $\langle M \rangle \in L_C$.

   ii. עבור $\langle M \rangle \in L_C$ מתקיים ש־ $L(M) \in C$. נניח בשלילה ש־ $L(M) \notin C \cap \mathrm{R}$ אזי, $L(M) \in C \backslash \mathrm{R}$ ואז בפרט $L(M) \in \mathrm{RE} \backslash \mathrm{R}$ ולכן $L(M) \notin \mathrm{coRE}$ ו־ $\langle M \rangle \notin L_C$. לכן, $L(M) \in C \cap \mathrm{R}$ ולכן $\langle M \rangle \in L_{C \cap \mathrm{R}}$.

   (ג) משני כיווני ההכלה קיבלנו כי $L_{C \cap \mathrm{R}} = L_C$ ולכן גם $L_C \notin \mathrm{R}$, כנדרש.