

# מודלים חישוביים

## תרגול מס' 13

8 ביוני 2016

נושאי התרגול:

- המחלקה NPC - המשך.

### 1 המחלקה NPC - המשך

נזכיר:

הגדרה 1.1 שפה  $L \in \mathcal{NPC}$  היא  $\mathcal{NP}$ -שלמה אם:

1.  $L \in \mathcal{NP}$ .

2.  $L$  היא  $\mathcal{NP}$ -קשה: לכל  $A \in \mathcal{NP}$  מתקיים ש-  $L \leq_p \mathcal{NP}$ .

#### תרגיל 1

הוכיחו כי:

$$\text{IS} \vee \text{CLIQUE} = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ has an IS or a clique of size } k \} \in \mathcal{NPC}$$

#### פתרון

נראה כי  $\text{IS} \vee \text{CLIQUE} \in \mathcal{NP}$  ושהיא  $\mathcal{NP}$ -קשה.

- קל לראות כי  $\text{IS} \vee \text{CLIQUE} \in \mathcal{NP}$  - בדקו בעצמכם.

- כעת, כדי להראות שהיא קשה, נראה  $\text{IS} \leq_p \text{IS} \vee \text{CLIQUE}$ . הרדוקציה תהיה  $f(\langle G, k \rangle) = \langle G', k' \rangle$  כך שעבור  $G = (V, E)$ ,  $G'$  יהיה  $G$  בתוספת  $|V|$  צמתים מבודדים, ו-  $k' = k + |V|$ . ואז:

- ברור כי  $f$  פולינומית.

- אם ל-  $G$  יש קבוצה ב"ת בגודל  $k$  אז ל-  $G'$  יש קבוצה ב"ת בגודל  $k + |V|$  ולכן  $\langle G', k' \rangle \in \text{IS} \vee \text{CLIQUE}$ .

- אם ל-  $G$  אין קבוצה ב"ת בגודל  $k$  אז גם ל-  $G'$  אין קבוצה ב"ת בגודל  $k + |V|$  וגם אין קליק בגודל  $k + |V|$  (כי הצמתים מבודדים). לכן,  $\langle G', k' \rangle \notin \text{IS} \vee \text{CLIQUE}$ .

#### תרגיל 2

נגדיר את השפה NAE3SAT כשפת קידודי הנוסחאות  $\langle \varphi \rangle$  כך ש-  $\varphi \in \text{3SAT}$  וקיימת השמה מספקת ל-  $\varphi$  כך שבכל פסוקית ליטרל אחד לפחות מקבל True וליטרל אחד לפחות מקבל False. לדוגמא, אם  $\varphi = (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_2)$  אז  $\varphi \in \text{NAE3SAT}$  עבור ההשמה  $x_1 = 1$  ו-  $x_2 = 0$ . הוכיחו כי  $\text{NAE3SAT} \in \mathcal{NPC}$ .

## פתרון

הוכיחו לבד כי  $\text{NAE3SAT} \in \mathcal{NP}$ . כעת, נשים לב שאם  $v$  היא השמת Not All Equal לנוסחה  $\varphi$  אז  $\bar{v}$  היא גם השמת Not All Equal ל- $\varphi$  (ברור כי  $\bar{v}$  היא השמת Not All Equal כי בכל פסוקית ערכי האמת יתהפכו ביחס ל- $v$  ואז מכיוון שהיה לפחות ליטרל אחד שקיבל True ואחד שקיבל False, המצב יישמר). תחילה נראה כי  $3\text{SAT} \leq_p \text{NAE4SAT}$  (כמו  $\text{NAE3SAT}$  רק עבור נוסחאות 4SAT). הרדוקציה: עבור קלט  $\langle \varphi \rangle = \langle C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_\ell \rangle$ , נחזיר:

$$\langle \varphi' \rangle = \langle (C_1 \vee z) \wedge (C_2 \vee z) \wedge \dots \wedge (C_\ell \vee z) \rangle$$

נכונות:

- ברור כי הרדוקציה פולינומית.
  - אם  $\langle \varphi \rangle \in 3\text{SAT}$ , תהא  $v$  השמה מספקת של  $\varphi$ . נגדיר את  $v'$  השמה ל- $\varphi'$  להיות זהה ל- $v$  ו- $v'(z) = 0$ . אזי,  $v'$  מספקת את  $\varphi'$  והיא Not All Equal ולכן  $\langle \varphi' \rangle \in \text{NAE4SAT}$ .
  - אם  $\langle \varphi' \rangle \in \text{NAE4SAT}$ , תהא  $v$  השמת Not All Equal ל- $\varphi'$ . נוכל להניח בה"כ כי  $v(z) = 0$  (אחרת, נסתכל על  $\bar{v}$  והיא גם השמת Not All Equal). אזי,  $v$  מספקת גם את  $\varphi$  ולכן  $\langle \varphi \rangle \in 3\text{SAT}$ .
- כעת, נראה  $\text{NAE4SAT} \leq_p \text{NAE3SAT}$ . הרדוקציה: עבור קלט  $\langle \varphi \rangle = \langle C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_\ell \rangle$

$$\bullet \text{ לכל } C_i = a \vee b \vee c \vee z$$

$$\text{— פצל את } C_i \text{ לשתי פסוקיות, } C_i^1 = a \vee b \vee w_i \text{ ו- } C_i^2 = \neg w_i \vee c \vee z$$

$$\bullet \text{ נגדיר: } \varphi' = C_1^1 \wedge C_1^2 \wedge \dots \wedge C_\ell^1 \wedge C_\ell^2$$

$$\bullet \text{ החזר את } \langle \varphi' \rangle.$$

נכונות:

- ברור כי הרדוקציה פולינומית.
- אם  $\langle \varphi \rangle \in \text{NAE4SAT}$ , תהא  $v$  השמת Not All Equal ל- $\varphi$ . נגדיר את  $v'$  השמה ל- $\varphi'$  להיות זהה ל- $v$  ו- $v'(w_i) = 0$ .

$$v'(w_i) = \begin{cases} 0 & (v(a) = v(b) = 1) \vee (v(c) = v(z) = 0) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ברור כי  $v'$  היא השמת Not All Equal ל- $\varphi'$ : אם  $v(a) = v(b) = 0$  אז נקבע את  $v'(w_i) = 1$  ואז הפסוקית הראשונה מסתפקת באופן NAE. בפסוקית השנייה אחד מתוך  $c, z$  מקבל 1 והליטרל  $\neg w_i$  הוא 0 וגם הפסוקית השנייה מסתפקת באופן NAE. שאר המקרים מאוד דומים, ולכן  $\langle \varphi' \rangle \in \text{NAE3SAT}$ .

- אם  $\langle \varphi' \rangle \in \text{NAE3SAT}$  עם השמת Not All Equal  $v'$  אז לא יתכן ש- $a, b, c, z$  כולם True או שכולם False ולכן  $v'$  היא גם השמת Not All Equal ל- $\varphi$  ו- $\langle \varphi \rangle \in \text{NAE4SAT}$ .

הוכחנו ש- $3\text{SAT} \leq_p \text{NAE4SAT}$  ו- $\text{NAE4SAT} \leq_p \text{NAE3SAT}$ . מהטרנזיטיביות של רדוקציות פולינומיות,  $\text{NAE3SAT} \leq_p \text{NAE3SAT}$ .  $3\text{SAT} \leq_p \text{NAE3SAT}$  היא ב- $\mathcal{NPC}$ ,  $\text{NAE3SAT} \in \mathcal{NPC}$  היא ב- $\mathcal{NP}$  ובסך הכל  $\text{NAE3SAT} \in \mathcal{NPC}$ .

## תרגיל 3

נזכיר כי  $\text{SubsetSum} = \{ \langle x_1, \dots, x_k, t \rangle \mid \exists I \subseteq \{1, \dots, k\}. \sum_{i \in I} x_i = t \}$ . הוכיחו כי:

$$\text{Partition} = \left\{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid \exists S \subseteq \{1, \dots, n\}. \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \notin S} x_i \right\} \in \mathcal{NPC}$$

ניתן להניח כי כל המספרים בשתי השפות הינם אי-שליליים.

## פתרון

נראה כי  $\text{Partition} \in \mathcal{NP}$  ושהיא  $\mathcal{NP}$ -קשה.

- קל לראות כי  $\text{Partition} \in \mathcal{NP}$  - בדקו בעצמכם.
- כעת, כדי להראות שהיא קשה, נראה  $\text{SubsetSum}_{\leq p} \text{Partition}$ . הרדוקציה תהיה

$$f(\langle x_1, \dots, x_n, t \rangle) = \langle x_1, \dots, x_n, a, b \rangle$$

כך שאם נסמן  $k = \sum_{i=1}^n x_i$ , אז  $a = t + k$  ו-  $b = 2k - t$ . ואז:

- ברור כי  $f$  פולינומית.

- אם  $\langle x_1, \dots, x_n, t \rangle \in \text{SubsetSum}$  אז קיימת  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  כך ש-  $\sum_{i \in I} x_i = t$ . נגדיר

$$S = \{x_i \mid i \in I\} \cup \{b\}$$

ואז:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in S} y &= \sum_{i \in I} x_i + b = t + 2k - t = 2k \\ \sum_{y \notin S} y &= \sum_{i \notin I} x_i + a = k - t + t + k = 2k \end{aligned}$$

ולכן  $\langle x_1, \dots, x_n, a, b \rangle \in \text{Partition}$ .

- אם  $\langle x_1, \dots, x_n, a, b \rangle \in \text{Partition}$ , קיימת חלוקה מאוזנת  $I$  של

$$\left\langle x_1, \dots, x_n, t + \sum_{i=1}^n x_i, 2 \sum_{i=1}^n x_i - t \right\rangle$$

ברור כי  $t + \sum_{i=1}^n x_i$  ו-  $2 \sum_{i=1}^n x_i - t$  לא יכולים להיות באותו צד של החלוקה. נסמן

$$I' = I \setminus \{a, b\}$$

אם כך:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I'} x_i + 2 \sum_{i=1}^n x_i - t &= \sum_{i \notin I'} x_i + t + \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i \in I'} x_i + \sum_{i=1}^n x_i - t &= \sum_{i \notin I'} x_i + t \\ \sum_{i \in I'} x_i + \sum_{i \in I'} x_i + \sum_{i \notin I'} x_i - t &= \sum_{i \notin I'} x_i + t \\ 2 \sum_{i \in I'} x_i &= 2t \\ \sum_{i \in I'} x_i &= t \end{aligned}$$

ולכן  $\langle x_1, \dots, x_n, t \rangle \in \text{SubsetSum}$ .

## תרגיל 4

הוכיחו כי:

$$XS = \left\{ x_1, \dots, x_n \mid \exists S \subseteq \{1, \dots, n\} \cdot \sum_{i \in S} x_i + |\bar{S}| = \sum_{i \notin S} x_i + |S| \right\} \in \mathcal{NP}$$

## פתרון

נראה כי  $XS \in \mathcal{NP}$  ושהיא  $\mathcal{NP}$ -קשה.

- קל לראות כי  $XS \in \mathcal{NP}$  - בדקו בעצמכם.
- כעת, כדי להראות שהיא קשה, נראה  $XS \leq_p \text{Partition}$ . הרדוקציה תהיה

$$f(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) = \langle x_1 + 1, \dots, x_n + 1 \rangle$$

ואז:

- ברור כי  $f$  פולינומית.

- מתקיים:

$$\begin{aligned} \langle x_1 + 1, \dots, x_n + 1 \rangle \in XS &\Leftrightarrow \exists S. \sum_{i \in S} (x_i + 1) + |\bar{S}| = \sum_{i \notin S} (x_i + 1) + |S| \\ &\Leftrightarrow \exists S. \sum_{i \in S} (x_i + 1) - |S| = \sum_{i \notin S} (x_i + 1) - |\bar{S}| \\ &\Leftrightarrow \exists S. \sum_{i \in S} (x_i + 1 - 1) = \sum_{i \notin S} (x_i + 1 - 1) \\ &\Leftrightarrow \exists S. \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \notin S} x_i \\ &\Leftrightarrow \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \text{Partition} \end{aligned}$$

ולכן הנכונות מתקיימת.

## תרגיל 5

בבעית הסוכן הנוסע, אנו מקבלים משקול של הגרף המכוון המלא (המייצג ערים, כבישים ואורכם) ומספר  $k$  וצריכים להכריע האם קיים מעגל המילטוני (המייצג נסיעה בין כל הערים) באורך לכל היותר  $k$ . הוכיחו כי  $TS \in \mathcal{NPC}$ .

## פתרון

נראה כי  $TS \in \mathcal{NP}$  ושהיא  $\mathcal{NP}$ -קשה.

- קל לראות כי  $TS \in \mathcal{NP}$  - בדקו בעצמכם.
- כעת, כדי להראות שהיא  $\mathcal{NP}$  קשה נראה ש-  $TS \leq_p \text{HamCycle}$ . הרדוקציה: בהנתן גרף מכוון  $G = (V, E)$ , נחזיר  $(G', k)$  כך ש:

- הצמתים ב-  $G'$  זהים לצמתים ב-  $G$ .

- הקשתות של  $G'$  הן כל הקשתות האפשריות  $(V \times V)$  כך שאם קשת מסוימת היתה בגרף המקורי, המשקל שלה יהיה 1 ואחרת המשקל שלה יהיה 2.

$$k = |V| -$$

• נכונות:

- הרדוקציה פולינומיאלית - ודאו לעצמכם.

- אם ב-  $G$  יש מעגל המילטוני אז הקשתות במעגל ב-  $G'$  ימושקלו ב- 1 ולכן ב-  $G'$  קיים מעגל המילטוני שמשקלו  $k$ .

- אם ב-  $G'$  יש מעגל המילטוני שמשקלו  $k = |V|$  אז המעגל לא יכול להכיל קשתות שמשקלן 2 ולכן אותו מעגל הוא גם מעגל המילטוני ב-  $G$ .