מודלים חישוביים
תרגול מס' 2

14 במרץ 2016

נושאי התרגול:

- אוטומט סופי אי־דטרמיניסטי (NFA).
- ביטויים רגולריים.

1 אוטומט סופי אי־דטרמיניסטי

בתרגול הקודם ראינו אפיון של שפות רגולריות ע"י מכונה מקבלת. פעולות המשמרות רגולריות: איחוד, חיתוך, משלים, פעולת הסגור הטרנזיטיבי ($L^{\star}$) וגם פעולת השרשור של שפות. כיצד הוכחנו בהרצאה את הטענה ששרשור של שפות רגולריות הוא רגולרי? בעזרת מכונה אי־דטרמיניסטית, כך שלאחר כל צעד שבו אנו מסמלצים את המכונה הראשונה ומגיעים למצב מקבל, ניתן לעבור לסמלץ את המכונה השנייה. באוטומט אי־דטרמיניסטי ניתן לעבור ביותר מאופן אחד ממצב למצב, וקריטריון הקבלה הוא קיום של מסלול מקבל (לפחות אחד). פורמלית:

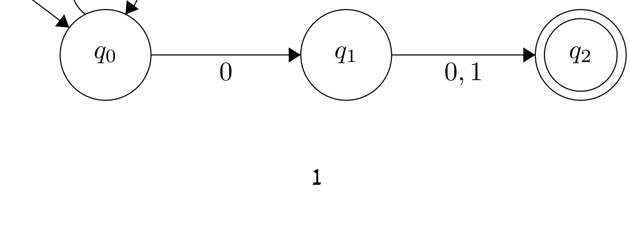
הגדרה 1.1 אוטומט סופי א"ד הוא חמישייה $M=(Q,\Sigma_{\epsilon},\delta,S,F)$ כך ש:

- Q הינה קבוצה סופית של מצבים.
- Σ הינו א"ב הקלט.
- $\delta:Q\times\Sigma_{\epsilon}\to\mathcal{P}(Q)$ הינה פונקצית המעברים, ו־ $\Sigma_{\epsilon}=\Sigma\cup\{\epsilon\}$. שימו לב שכעת ניתן לעבור ליותר ממצב אחד.
- $S\subseteq Q$ הינה קבוצת המצבים ההתחלתיים.
- $F\subseteq Q$ הינה קבוצת מצבים מקבלים.

הגדרה 1.2 נגיד ש־ M מקבל את $w\in\Sigma^{\star}$ אם $\hat{\delta}(S,w)\cap F\neq\emptyset$. כלומר, אם לפחות מסלול חישוב אחד של M (ממצב התחלתי כלשהו) על w מגיע למצב מקבל. ראו בהרצאות את ההגדרה המדויקת של $\hat{\delta}(S,w)$ עבור אוטומטים סופיים אי־דטרמיניסטיים עם מסעי אפסילון.

דוגמא 1

נראה כי השפה L_1, המכילה את המילים מעל הא"ב $\{0,1\}$ מאורך לפחות 2 כך שהספרה הלפני־אחרונה היא 0, היא רגולרית. הוכחנו בכיתה (ונזכר בקרוב) כי המודל האי־דטרמיניסטי שקול למודל הדטרמיניסטי. אם כך, מספיק להראות מכונה אי־דטרמיניסטית:

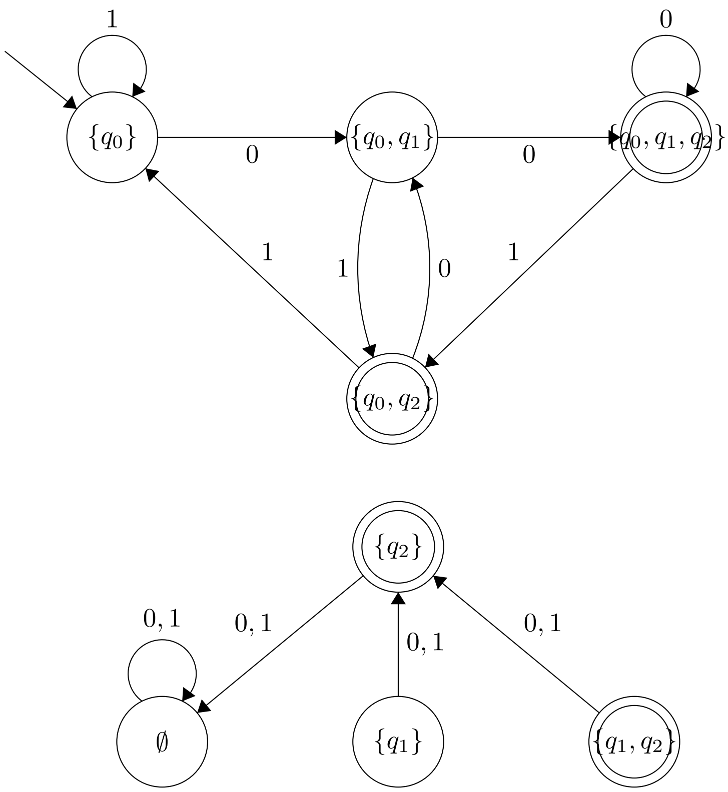


נזכיר כעת את המעבר מאוטומט אי־דטרמיניסטי $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ לאוטומט דטרמינסטי $M = (Q', \Sigma, \delta', S, F')$. נניח כי ב־ N אין מסעי אפסילון. אם יש, נוכל תמיד להמיר את N ל־ N' שקול ללא מסעי אפסילון בצורה פשוטה יחסית, כפי שנלמד בכיתה. האוטומט M יהיה:

- $Q' = \mathcal{P}(Q)$.
- לכל $R \in Q'$ ו־ $\sigma \in \Sigma$, $\delta'(R, \sigma) = \bigcup_{q \in R} \{\delta(q, \sigma)\}$. שימו לב שהתמונה של δ' היא אכן איברים ב־ Q', כנדרש.
- $F' = \{R \in Q' \mid R \cap F \neq \emptyset\}$.

דוגמא 2

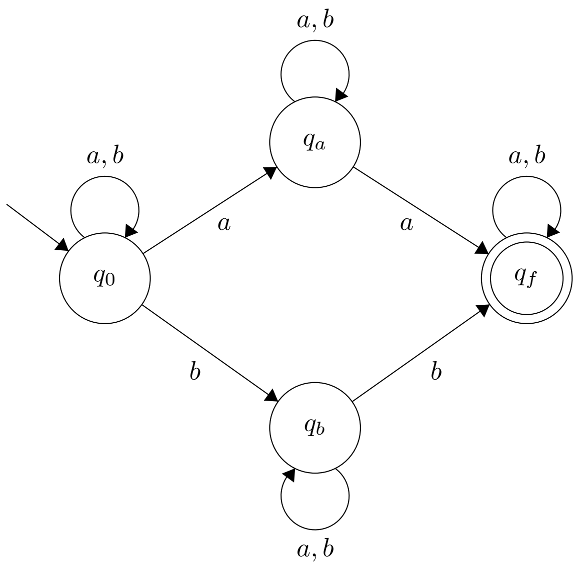
נבנה אס"ד ל־ L_1 שראינו קודם בעזרת המעבר לאוטומט חזקה.



שימו לב שהחלק התחתון אינו יגיע מ־ q_0 ולכן ניתן להוריד אותו ועדיין להשאר עם אותה שפה.

דוגמא 3

אוטומט אי־דטרמיניסטי מעל הא"ב $\Sigma = \{a, b\}$ עבור השפה $L_2 = \{u\sigma v\sigma w \mid u, v, w \in \Sigma^\star \wedge \sigma \in \Sigma\}$:



הוכיחו פורמלית את נכונות הבנייה.

2 ביטויים רגולריים

עד כה ראינו שני אפיונים לשפות רגולריות בעזרת מודל "מקבל". כעת נראה אפיון לשפות רגולריות בעזרת מבנה "יוצר" - ביטויים רגולריים.

הגדרה 2.1 אוסף הביטויים הרגולריים מעל א"ב Σ המסומן ב- R מוגדר באינדוקצית מבנה באופן הבא:

- בסיס:
  - $\emptyset \in R$.
  - $\epsilon \in R$.
  - לכל $\sigma \in \Sigma$, $\sigma \in R$.
- צעד:
  - לכל $r_1, r_2 \in R$, $(r_1 \cup r_2) \in R$. לעתים נסמן גם: $(r_1 + r_2)$.
  - לכל $r_1, r_2 \in R$, $(r_1 \cdot r_2) \in R$.
  - לכל $r \in R$, $r^\star \in R$.

הגדרה 2.2 עבור ביטוי רגולרי $r \in R$, $L(r)$ היא השפה המוגדרת על ידו, באופן שראינו בכיתה.

דוגמא 4

עבור ביטויים רגולריים r, s מתקיים באופן כללי:

1. $L\left((r+\epsilon)^\star\right) = L(r^\star)$.
2. $L(r^\star s + s^\star) \neq L(r^\star s^\star)$, כי למשל ב- $L(r^\star s + s^\star)$ ניתן לסיים רק עם מילה אחת מ- $L(s)$ אם התחלנו עם מילה ב- $L(r)$ וב- $L(r^\star s^\star)$ ניתן לסיים עם כמה מילים.
3. $L\left((r^\star s^\star)^\star\right) = L\left((r+s)^\star\right)$.

דוגמא 5

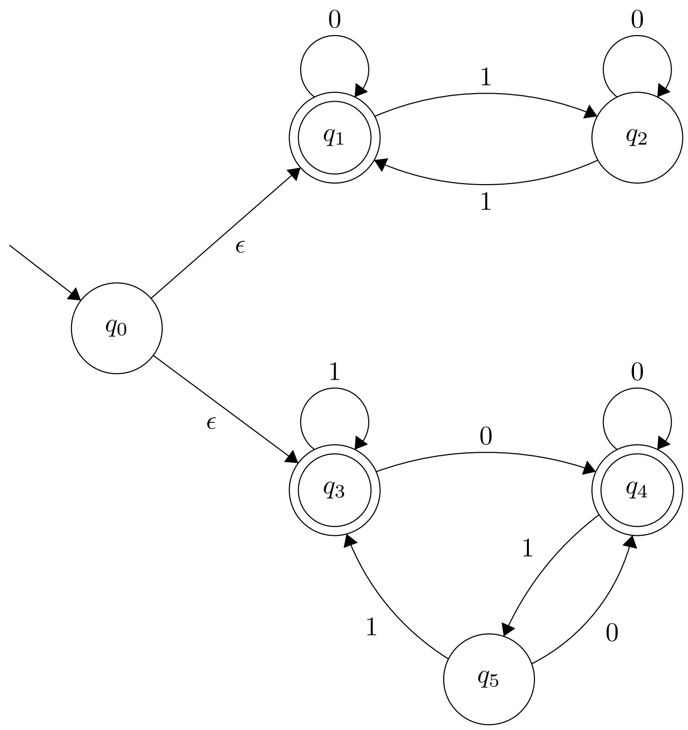
ביטוי רגולרי עבור L_1 שראינו קודם - $\left(\left(\left((0 \cup 1)^\star \cdot 0\right) \cdot (0 \cup 1)\right)\right)$, או שניתן לוותר על סוגריים כשהמשמעות ברורה: $\Sigma^\star 0 \Sigma$.

דוגמא 6

בנו אוטומט אי־דטרמיניסטי ודקדוק עבור השפה L_3 מעל הא"ב $\Sigma = \{0,1\}$ המכילה את כל המילים שלא מסתיימות ב־ 01 או שמספר האחדים בהן זוגי. נתחיל בביטוי רגולרי:

$$(\epsilon \cup \Sigma \cup (\Sigma^\star (10 \cup 11 \cup 00))) \cup \left(0^\star (10^\star 10^\star)^\star\right)$$

וכעת נבנה את האוטומט:



לא נחזור בתרגול על בנייה שיטתית של אוטומט מביטוי רגולרי ולהיפך. ודאו כי אתם יודעים לעשות זאת. כמו כן, סלקו בעצמכם את מסעי האפסילון באוטומט שלמעלה.

תרגיל 1

נגדיר את הפעולה rev על שפות: $rev\left(L\right) = \left\{w^R \mid w \in L\right\}$. הוכיחו כי השפות הרגולריות סגורות תחת rev.

פתרון

L רגולרית ולכן קיים אס"ד המקבל אותה: $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ כך ש־ $L\left(M\right) = L$. נראה אוטומט אי־דטרמיניסטי N כך ש־ $L\left(N\right) = rev\left(L\right)$. מכיוון ש־ $L\left(N\right)$ רגולרית, בכך נסיים. האינטואיציה? נרצה "להפוך את הקשתות" ולהפוך את המצב ההתחלתי למצב מקבל ואת המצבים המקבלים למצבים התחלתיים. פורמלית, $N = (Q, \Sigma_\epsilon, \delta', S, F')$ כך ש־ $S = F$, $F' = \{q_0\}$ ועבור δ', לכל $q \in Q$ ו־ $\sigma \in \Sigma$, $\delta'\left(q, \sigma\right) = \{r \in Q \mid \delta\left(r, \sigma\right) = q\}$. נוכיח כי אכן $L\left(N\right) = rev\left(L\right)$ ע"י הכלה דו־כיוונית:

$$\begin{aligned}
w = x_n, \ldots, x_1 \in rev\left(L\right) \quad &\Leftrightarrow \quad w^R = x_1, \ldots, x_n \in L \\
&\Leftrightarrow \quad \exists q_0, \ldots, q_n \in Q. \delta\left(q_0, x_1\right) = q_1 \wedge \ldots \wedge \delta\left(q_{n-1}, x_n\right) = q_n \in F \\
&\Leftrightarrow \quad q_n \in S \wedge q_{n-1} \in \delta'\left(q_n, x_n\right) \wedge \ldots \wedge q_0 \in \delta'\left(q_1, x_1\right) \wedge q_0 \in F' \\
&\Leftrightarrow \quad w \in L\left(N\right)
\end{aligned}$$

תרגיל 2

נגדיר את הפעולה $Drop$ על שפות:

$$Drop\left(L\right)=\left\{w_1w_2 \mid w_1,w_2\in\Sigma^{\star}\wedge\exists\sigma\in\Sigma.w_1\sigma w_2\in L\right\}$$

הוכיחו כי השפות הרגולריות סגורות תחת $Drop$.

פתרון

L רגולרית ולכן קיים אס"ד המקבל אותה: $M=\left(Q,\Sigma,\delta,q_0,F\right)$ כך ש־ $L=L\left(M\right)$. נראה אוטומט אי־דטרמיניסטי N כך ש־ $L\left(N\right)=Drop\left(L\right)$. האינטואיציה? נרצה "לנחש" את התו החסר ולהמשיך הלאה כרגיל. כלומר, נשכפל את האוטומט עבור L ולכל מעבר נוסיף מעבר אפסילון מהעותק הראשון לשני. פורמלית, $N=\left(Q\times\left\{1,2\right\},\Sigma_{\epsilon},\delta',\left\{\left(q_0,1\right)\right\},F\times\left\{2\right\}\right)$. עבור δ':

- לכל $q\in Q$, $\sigma\in\Sigma$ ו־ $i\in\left\{1,2\right\}$, $\delta'\left(\left(q,i\right),\sigma\right)=\left\{\left(\delta\left(q,\sigma\right),i\right)\right\}$. אלו הם המעברים המקוריים, משוכפלים.
- לכל $q\in Q$, $\delta'\left(\left(q,1\right),\epsilon\right)=\left\{\left(\delta\left(q,\sigma\right),2\right)\mid\sigma\in\Sigma\right\}$.

נוכיח כי אכן $L\left(N\right)=Drop\left(L\right)$ ע"י הכלה דו־כיוונית:

$$\begin{aligned}
w\in Drop\left(L\right) &\Leftrightarrow \exists w_1,w_2\in\Sigma^{\star}.w=w_1w_2\wedge\exists\sigma\in\Sigma.w_1\sigma w_2\in L\\
&\Leftrightarrow w_1\sigma w_2\in L\left(M\right)\\
&\Leftrightarrow \exists q_1,q_2\in Q\exists q_f\in F.\hat{\delta}\left(q_0,w_1\right)=q_1\wedge\delta\left(q_1,\sigma\right)=q_2\wedge\hat{\delta}\left(q_2,w_2\right)=q_f\\
&\Leftrightarrow \exists q_1,q_2\in Q\exists q_f\in F.\\
&\qquad \left(q_1,1\right)\in\hat{\delta}'\left(\left(q_0,1\right),w_1\right)\wedge\left(q_2,2\right)\in\delta'\left(\left(q_1,1\right),\epsilon\right)\wedge\left(q_f,2\right)\in\hat{\delta}'\left(\left(q_2,2\right),w_2\right)\\
&\Leftrightarrow w=w_1w_2\in L\left(N\right)
\end{aligned}$$

תרגיל 3

תהינה L_1 ו־ L_2 שפות רגולריות מעל הא"ב $\Sigma=\left\{a,b\right\}$. הוכח כי השפה הבאה רגולרית:

$$L=\left\{uavw\mid u,v,w\in\Sigma^{\star}\wedge ua\in L_1\wedge v\in L_1\wedge vw\in L_2\right\}$$

פתרון

נשתמש בתכונות סגור לשפות רגולריות שראינו עד כה (ובהמשך נראה עוד). השפה הבאה רגולרית מסגירות השפות הרגולריות לחיתוך ושרשור:

$$L' = L_1\cap\left(\Sigma^{\star}\cdot\left\{a\right\}\right)=\left\{ua\mid u\in\Sigma^{\star}\wedge ua\in L_1\right\}$$

כעת, משיקולים דומים, נמשיך לחלקים הבאים של המילים ב־ L:

$$\begin{aligned}
L'' &= L_1\cdot\Sigma^{\star}\\
L''' &= L''\cap L_2=\left\{vw\mid v,w\in\Sigma^{\star}\wedge v\in L_1\wedge vw\in L_2\right\}
\end{aligned}$$

ולבסוף:

$$L=L'\cdot L'''$$