

מודלים חישוביים

תרגול מס' 6

6 באפריל 2016

נושאי התרגול:

- אוטומט מחסנית.
- פעולות סגור נוספות לשפות חסרות הקשר.

1 אוטומט מחסנית

לשפות רגולריות ראינו גם מודל מקבל (אס"ד, למשל) וגם מודל יוצר (ביטויים רגולריים, או דקדוקים רגולריים). לשפות ח"ה ראינו מודל יוצר (דקדוקים חסרי-הקשר). כעת נראה מודל מקבל - אוטומט מחסנית (PDA). אוטומט מחסנית הוא ששייה $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ כך ש:

- Q - קבוצה סופית של מצבים.
- Σ - א"ב הקלט.
- Γ - א"ב המחסנית.
- $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\epsilon)$ - פונקצית המעברים (שימו לב לאי-דטרמיניזם).
- $q_0 \in Q$ - מצב התחלתי.
- $F \subseteq Q$ - מצבים מקבלים.

מה המשמעות של $(q_2, c) \in \delta(q_1, a, b)$? אם אנו במצב q_1 , קוראים a מהקלט ורואים b במחסנית, אנו מוציאים את b (pop), שמים במקומו c (push) ועוברים ל- q_2 . a, b, c יכולים להיות ϵ . אם $a = \epsilon$ זה אומר שהאוטומט יכול לעשות את המעבר ללא קריאה מהקלט, אם $b = \epsilon$ זה אומר שהאוטומט יכול לעשות את המעבר בלי לקרוא ולהוציא דבר מהמחסנית ואם $c = \epsilon$ זה אומר שהאוטומט לא דוחף דבר למחסנית בעת המעבר ל- q_2 .

הגדרה 1.1 נגדיר ש- M מקבל את $w \in \Sigma^*$ אם קיים $q' \in F$ כך ש- $(q', t) \in \hat{\delta}(q_0, w, \epsilon)$ עבור $t \in \Gamma^*$ כלשהו. כלומר, אם כאשר מתחילים בקריאת w , M יכול להיות במצב מקבל q' עם תוכן מחסנית t . את $L(M)$ נגדיר, כרגיל, כאוסף המילים ש- M מקבל.

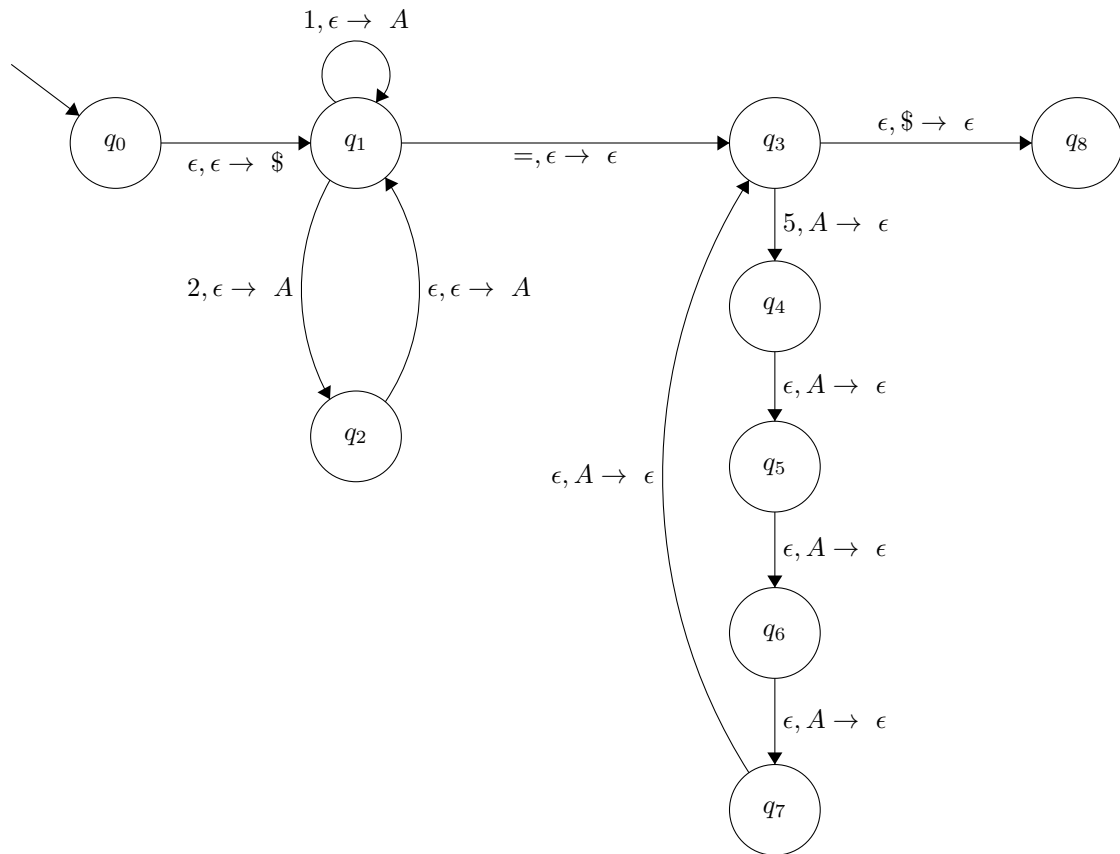
בהרצאה הוכחנו כי שפה מתקבלת ע"י אוטומט מחסנית אם"ם היא שייכת לשפה שיוצר דקדוק ח"ה. אם כך, זהו אכן אפיון נוסף לשפות ח"ה.

דוגמא 1

נבנה אוטומט מחסנית עבור השפה

$$L_2 = \{x = y \mid x \in \{1, 2\}^* \wedge y \in \{5\}^* \wedge \#_1(x) + 2 \cdot \#_2(x) = 5 \cdot \#_5(y)\}$$

לדוגמא, $1(121)^4 21 = 5555 \in L_2$. האוטומט יהיה:



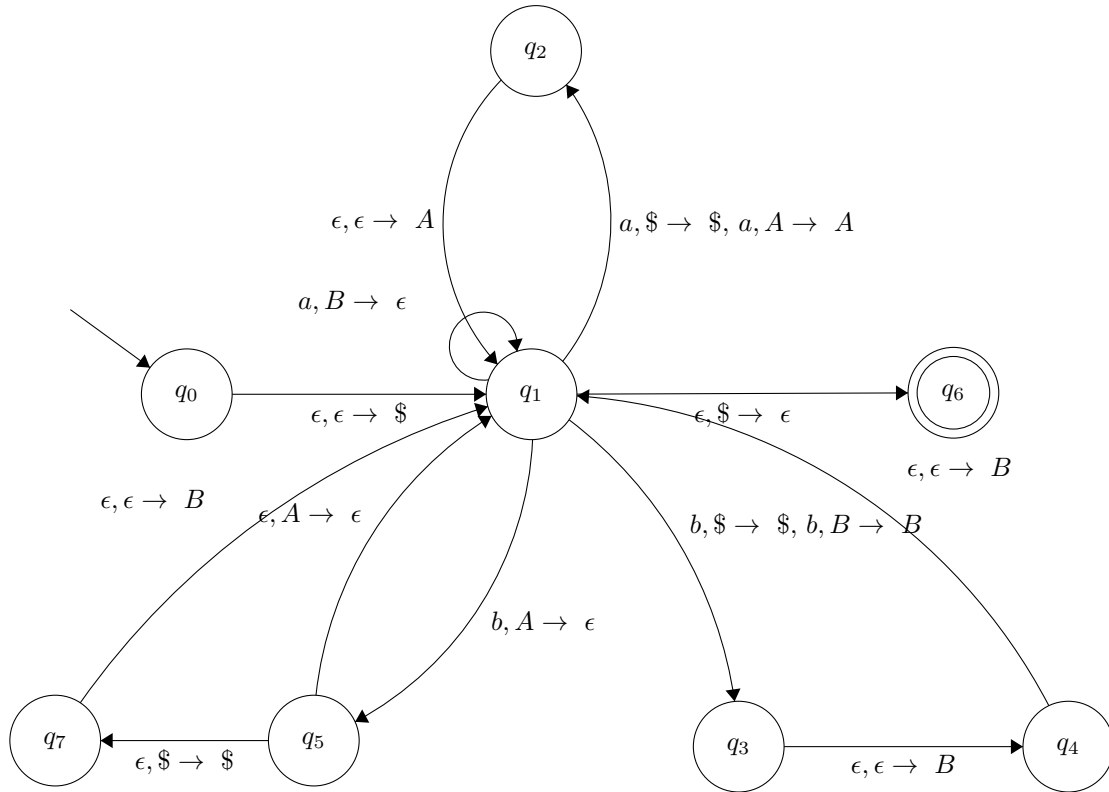
נמצא דקדוק ח"ה עבור L_2 , $G = (V, \Sigma, R, S_0)$. נסמן: $V = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4\}$, $\Sigma = \{1, 2, 5, =\}$ ו- R מכיל את חוקי הגזירה הבאים:

- $S_0 \rightarrow 1S_1 \mid 2S_2 \mid =$
- $S_1 \rightarrow 1S_2 \mid 2S_3$
- $S_2 \rightarrow 1S_3 \mid 2S_4$
- $S_3 \rightarrow 1S_4 \mid 2S_05$
- $S_4 \rightarrow 1S_05 \mid 2S_15$

נסו לבנות דקדוק ח"ה בעל מצב יחיד המקבל את L_2 .

דוגמא 2

נבנה אוטומט מחסנית עבור השפה $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2 \cdot \#_b(w)\}$



נשים לב שאם בראש המחסנית יש לנו B , קראנו עד כה w' כך ש- $2 \cdot \#_b(w') > \#_a(w')$ ואם יש לנו A אז $2 \cdot \#_b(w') < \#_a(w')$. מצאו דקדוק ח"ה ל- L_1 לפי האלגוריתם שנלמד בכיתה.

תרגיל 1

הוכיחו כי השפות חסרות ההקשר סגורות תחת חיתוך עם שפות רגולריות.

פתרון

תהא L שפה ח"ה ויהא $P = (Q_P, \Sigma, \Gamma, \delta_P, q_P, F_P)$ האוטומט מחסנית (PDA) שמקבל אותה ותהא L' שפה רגולרית כך ש- $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_A, F_A)$ הוא אס"ד (DFA) המקבל אותה. נבנה אוטומט מחסנית P' כך שיתקיים $L(P') = L \cap L'$.

$$P' = (Q_P \times Q_A, \Sigma, \Gamma, \delta', (q_P, q_A), F_P \times F_A)$$

נצטרך להגדיר את δ_A גם על ϵ . לשם כך, נרחיב את δ_A כך: לכל $q \in Q_A$, $\delta_A(q, \epsilon) = q$, כעת, לכל $q_1 \in Q_P$, $q_2 \in Q_A$ ו- $\sigma \in \Sigma_\epsilon$ ו- $\gamma \in \Gamma_\epsilon$:

$$\delta'((q_1, q_2), \sigma, \gamma) = \{(r, s), \gamma'\} \mid (r, \gamma') \in \delta_P(q_1, \sigma, \gamma) \wedge s = \delta_A(q_2, \sigma)\}$$

כדי להוכיח את הטענה, נצטרך להוכיח תחילה שתי למות, אשר הוכחתן תשאר כתרגיל (ההוכחה - באינדוקציה על אורך w):

למה 1.2 קיים מסלול חישוב של P על w שמסתיים במצב מקבל $q \in F_P$ אם"ם קיים מסלול חישוב של P' על w שמסתיים במצב $(q, q') \in Q_A$ עבור $q' \in Q_A$ כלשהו.

למה 1.3 כל מסלול חישוב של A על w מסתיים במצב מקבל $q \in F_A$ אם"ם כל מסלול חישוב של P' על w מסתיים במצב $(q', q) \in Q_P$ עבור $q' \in Q_P$ כלשהו.

כעת, אם $w \in L \cap L'$ אזי מהלמה הראשונה קיים מסלול חישוב של P על w שמסתיים במצב מקבל $f_P \in F_P$. מהלמה השנייה, כל מסלול חישוב של A על w מסתיים במצב מקבל $f_A \in F_A$. מכאן, שקיים מסלול חישוב של P' על w שמסתיים ב- (f_P, f_A) . הוא מצב מקבל של P' ולכן $w \in L(P')$. הכיוון השני סימטרי.

2 פעולות סגור נוספות לשפות חסרות הקשר

ראינו כי השפות חסרות ההקשר סגורות תחת איחוד, שרשור, סגור קליני, חיתוך עם שפה רגולרית, הומומורפיזם והומומורפיזם הפוך.

תרגיל 2

הוכיחו כי השפה $L_5 = \{a^{3j}b^{2k} \mid j, k > 0\} \cup \{b\}^*$ אינה ח"ה. זכרו שכבר ראינו כי שפה זו מקיימת את תנאי למת הניפוח לשפות ח"ה.

פתרון

נסמן $\Sigma = \{a, b\}$ ונניח בשלילה כי L_5 ח"ה. נסמן:

$$L' = L_5 \cap L(a \cdot \Sigma^*) = \{a^{3j}b^{2k} \mid j, k > 0\}$$

מסגירות לחיתוך עם שפות רגולריות, L' ח"ה. כעת, נגדיר $g: \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ כך ש- $g(a) = b$ ו- $g(b) = \epsilon$ ונסמן:

$$L'' = g(L') = \{b^{2k} \mid k > 0\}$$

מסגירות להומומורפיזם, L'' ח"ה. אבל, נוכיח כי L'' אינה ח"ה תוך שימוש בלמת הניפוח לשפות ח"ה. נניח בשלילה כי L'' ח"ה והיא ℓ קבוע הניפוח שלה. נבחר $s = b^{2^\ell}$ ומתקיים כי $|s| \geq \ell$. יהא $s = uvxyz$ פירוק כך ש- $|vy| > 0$ ו- $|vxy| \leq \ell$. תהא $w = uv^2xy^2z$. אזי, מתקיים כי:

$$2^\ell < 2^\ell + |vy| = |w| \leq 2^\ell + |vxy| \leq 2^\ell + \ell < 2^\ell + 2^\ell = 2^{\ell+1}$$

אם כך, לא קיים k כך ש- $w = b^{2^k}$ ולכן $w \notin L''$ ו- L'' אינה ח"ה. זה בסתירה להנחה שלנו ולסגירות לשפות ח"ה ולכן L_5 עצמה אינה ח"ה.

תרגיל 3

הוכיחו כי השפות חסרות ההקשר אינן סגורות תחת

$$C(L_1, L_2) = \{xyz \mid xy \in L_1 \wedge yz \in L_2 \wedge x, y, z \neq \epsilon\}$$

פתרון

נבחר:

$$L_1 = \{0^n \# 1^n \# \mid n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{\# 1^n \# 2^n \mid n \geq 0\}$$

מעל $\Sigma = \{0, 1, 2, \#\}$ ושימו לב כי

$$C(L_1, L_2) = \{0^n \# 1^n \# 2^n \mid n \geq 0\} \cup \{0^n \# 1^n \# 1^m \# 2^m \mid n, m \geq 0\}$$

כעת, נניח בשלילה כי $C(L_1, L_2)$ ח"ה ונסמן $\Delta = \{0, 1, 2\}$. אזי, מסגירות לחיתוך רגולרי, גם

$$L' = C(L_1, L_2) \cap L(\Delta^* \# \Delta^* \# \Delta^*) = \{0^n \# 1^n \# 2^n \mid n \geq 0\}$$

חסרת הקשר. נגדיר הומומורפיזם $h: \Sigma \rightarrow \Delta^*$ כך ש- $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h(2) = 2$ ו- $h(\#) = \epsilon$. נקבל שגם

$$h(L') = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\}$$

חסרת הקשר, בסתירה למה שראינו בכיתה. אם כך, $C(L_1, L_2)$ אינה חסרת הקשר.

תרגיל 4

תהא $L \subseteq \Sigma^*$. הוכיחו כי השפות חסרות ההקשר אינן סגורות חתת

$$\text{DropMiddle}(L) = \{xy \in \Sigma^* \mid \exists \sigma \in \Sigma.x\sigma y \in L \wedge |x| = |y|\}$$

פתרון

נבחר

$$L = \{0^n 1^n 42^m 3^m \mid m, n \geq 0\}$$

זוהי שפת ח"ה. כדי לראות זאת, נוכל להגדיר $L_1 = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$, $L_2 = \{4\}$ ו- $L_3 = \{2^n 3^n \mid n \geq 0\}$ ששלושתן חסרות הקשר, ואז

$$L = L_1 \circ L_2 \circ L_3$$

גם חסרת הקשר, מסגירות לשרשור. נניח בשלילה ש- $\text{DropMiddle}(L)$ גם ח"ה. מסגירות לחיתוך עם שפות רגולריות, גם

$$L' = \text{DropMiddle}(L) \cap \{0, 1, 2, 3\}^* = \{0^n 1^n 2^n 3^n \mid n \geq 0\}$$

חסרת הקשר. אך קל לראות שאם נגדיר הומומורפיזם h הממפה כל תו לעצמו ואת 3 ל- ϵ נקבל כי גם $h(L') = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\}$ חסרת הקשר, בסתירה למה שראינו בכיתה.

תרגיל 5

הראו כי אם L רגולרית, אזי $Mirror(L) = \{ww^R \mid w \in L\}$ חסרת הקשר.

פתרון

תהא L שפה רגולרית ו- $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ אס"ד המקבל אותה. הרעיון: נבנה אוטומט מחסנית המדמה את M ומכניס את אותיות הקלט למחסנית. האוטומט ינחש מתי אנו עוברים לקרוא את w^R ויעבור לריקון מחסנית. אם המחסנית ריקה, נקבל. פורמלית, נגדיר:

$$P = (Q \cup \{s, r, q_f\}, \Sigma_\epsilon, \Sigma \cup \{\$, \delta', s, \{q_f\})$$

כך ש-

- s הוא המצב ההתחלתי החדש.
- r הוא המצב שאליו P עוברת כאשר היא מנחשת שקריאת w הסיימה והחלה קריאת w^R .
- q_f הוא המצב המקבל החדש.
- פונקצית המעברים δ' :
 - $\delta'(s, \epsilon, \epsilon) = \{(q_0, \$)\}$ מתחילים בלדחוף $\$$ למחסנית ולעבור למצב ההתחלתי של M .
 - $\delta'(q, \sigma, \epsilon) = \{(\delta(q, \sigma), \sigma)\}$ זהו הסימלוח של M .
 - $\delta'(q, \epsilon, \epsilon) = \{(r, \epsilon)\}$ בהגעה למצב מקבל של M עוברים ל- r מבלי לשנות את תוכן המחסנית.
 - $\delta'(r, \sigma, \sigma) = \{(r, \epsilon)\}$ מהמצב r , אם מקבלים אות בקלט שגם נמצאת בראש המחסנית, מוציאים את האות מהמחסנית ונשארים ב- r .
 - $\delta'(r, \epsilon, \$) = \{(q_f, \$)\}$ אם הצלחנו לרוקן את כל w^R , עוברים למצב מקבל.

הוכיחו פורמלית כי $L(P) = Mirror(L)$