

# מודלים חישוביים

## תרגול מס' 8

18 באפריל 2016

נושאי התרגול:

- המחלקות R ו-RE.
- מונים (Enumerators).
- טיעוני ספירה.

### 1 המחלקות R ו-RE

**הגדרה 1.1** מ"ט  $M$  מקבלת (accepts) שפה  $L$  אם על קלט  $w$ : אם  $w \in L$  היא מגיעה למצב מקבל ואם  $w \notin L$  היא מגיעה למצב דוחה או לא עוצרת.

**הגדרה 1.2** מ"ט  $M$  מכריעה (decides) שפה  $L$  אם על קלט  $w$ : אם  $w \in L$  היא מגיעה למצב מקבל ואם  $w \notin L$  היא מגיעה למצב דוחה. בפרט, תמיד עוצרת.

**הגדרה 1.3** נגיד ש-  $L \in RE$  אם קיימת מ"ט  $M$  המקבלת את  $L$ . נגיד ש-  $L \in R$  אם קיימת מ"ט  $M$  המכריעה את  $L$ .

**הגדרה 1.4** המחלקה coRE היא מחלקת השפות שמסלימן הוא ב-RE. כלומר,  $L \in coRE$  אם קיימת מ"ט  $M$  המקבלת את  $\bar{L}$ . הוכחנו בכיתה כי  $R = RE \cap coRE$ .

נזכיר כמה שפות מפורסמות:

- בעית העצירה -  $H_{TM} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ is a TM and } M \text{ halts on } w\} \in RE \setminus R$
- בעית הקבלה -  $A_{TM} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ is a TM and } M \text{ accepts } w\} \in RE \setminus R$
- $L_3 = \{\langle M_1 \rangle, w_1, \langle M_2 \rangle, w_2 \mid w_1 \in L(M_1) \wedge w_2 \notin L(M_2)\} \notin RE \cup coRE$

כמו כן, נזכיר כי המחלקה R סגורה תחת משלים, איחוד וחיתוך.

### תרגיל 1

הוכיחו כי R סגורה תחת הפעולה  $\oplus$ . כלומר, שאם  $L_1 \in R$  וגם  $L_2 \in R$  אזי

$$L_1 \oplus L_2 = \{w \mid w \in L_1 \setminus L_2 \vee w \in L_2 \setminus L_1\} \in R$$

## פתרון

ניתן כמובן להראות זאת ישירות בעזרת תכונות סגור (עשו זאת). נוכיח ישירות. תהינה  $M_1, M_2$  מ"ט המכריעות את  $L_1, L_2$  בהתאמה. נבנה  $M_{\oplus}$  שעל קלט  $w$ :

1. מסמלצת את  $M_1$  על  $w$ .
2. מסמלצת את  $M_2$  על  $w$ .
3. אם  $M_1$  קיבלה ו-  $M_2$  דחתה, קבל.
4. אם  $M_1$  דחתה ו-  $M_2$  קיבלה, קבל.
5. דחה.

ברור כי  $M_{\oplus}$  תמיד עוצרת, ו-  $w \in L_1 \oplus L_2$  אם"ם  $M_{\oplus}$  מקבלת. מכאן, ש-  $L_1 \oplus L_2 \in R$ .

## תרגיל 2

הוכיחו כי RE סגורה תחת איחוד.

## פתרון

תהינה  $M_1, M_2$  מ"ט המקבלות את  $L_1, L_2$  בהתאמה. נבנה  $M$  שעל קלט  $w$ :

1. מסמלצת את  $M_1$  ו-  $M_2$  על  $w$  במקביל: בכל שלב מסמלצים צעד אחד בכל אחת מהמכונות.
2. אם אחת מהן קיבלה, קבל.
3. אם שתיהן דחו, דחה.

נכונות: אם  $w \in L_1 \cup L_2$  אזי אחד מהסמלוצים יעצור ויקבל ומכאן ש-  $M$  תקבל. אם  $w \notin L_1 \cup L_2$  אזי אף אחד מהסמלוצים לא יעצור ויקבל ולכן  $M$  תדחה או לא תעצור לעולם.

## תרגיל 3

נגדיר את השפה

$$EVEN_{DFA} = \{ \langle D \rangle \mid D \text{ is a DFA over } \Sigma = \{0, 1\} \text{ and } L(D) \text{ contains a word of even length} \}$$

הוכיחו כי  $EVEN_{DFA} \in R$ .

## פתרון

נזכיר כי השפה

$$EMPTY_{DFA} = \{ \langle D \rangle \mid D \text{ is a DFA and } L(D) = \emptyset \}$$

היא ב- R. תהא  $M$  המכונה שמכריעה אותה.  $M'$  על קלט  $\langle D \rangle$ :

1. אם  $\langle D \rangle$  אינו קידוד חוקי של אס"ד מעל  $\Sigma = \{0, 1\}$ , דחה.
2. בנה אס"ד  $D_{even}$  עבור  $L((\Sigma\Sigma)^*)$ .
3. בנה אס"ד  $D'$  עבור  $L(D) \cap L((\Sigma\Sigma)^*)$  (כיצד?).
4. סמלץ את  $M$  על  $\langle D' \rangle$ .
5. אם  $M$  קיבלה, דחה. אם  $M$  דחתה, קבל.

הנכונות ברורה:  $L(D)$  מעל  $\Sigma = \{0, 1\}$  מכילה מילה באורך זוגי אם"ם  $L(D) \cap L((\Sigma\Sigma)^*)$  אינה ריקה, אם"ם  $M$  תדחה, אם"ם  $M'$  תקבל.

## תרגיל 4

נגדיר את השפה  $E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$ . הוכיחו כי  $E_{TM} \in \text{coRE}$ .

### פתרון

נוכיח כי  $\overline{E_{TM}} \in \text{RE}$ . נבנה מ"ט  $M'$  שמקבלת את  $\overline{E_{TM}}$  כך שעל קלט  $\langle M \rangle$ :

1. בודקת כי  $\langle M \rangle$  הוא קידוד חוקי של מ"ט. אם לא, מקבלת. יהא  $\Sigma$  הא"ב שמעליו  $M$  עובדת. יהא  $x_1, x_2, \dots$  הסדר הלכסיקוגרפי של כל המילים מעל  $\Sigma^*$ .
2. לכל  $i$  החל מ-1:

(א) לכל  $j$  מ-1 עד  $i$ :

- i. סמלץ את  $M$  על  $x_j$  למשך  $i$  צעדים.
- ii. אם  $M$  מקבלת, קבל.

הנכונות:

- אם  $\langle M \rangle \in \overline{E_{TM}}$  אזי קיימים  $i, j$  כך ש-  $M$  מקבלת את  $x_j$  לאחר  $i$  צעדים. מכאן, ש-  $M'$  תקבל.
- אם  $\langle M \rangle \notin \overline{E_{TM}}$  אזי  $\langle M \rangle \in E_{TM}$  ולכן לכל  $j$  לא תקבל את  $x_j$  (לא למשנה לאחר כמה צעדים), ו-  $M'$  לעולם לא תקבל.

הראינו כי  $\overline{E_{TM}} \in \text{RE}$  ולכן  $E_{TM} \in \text{coRE}$ .

## תרגיל 5

נגדיר את השפה  $L_\infty = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| = \infty\}$ . הוכיחו כי  $L_\infty \notin \text{R}$ .

### פתרון

ניח בשליה ש-  $L_\infty \in \text{R}$  ותהא  $H$  מ"ט שמכריעה אותה. נבנה מ"ט  $M'$  שמכריעה את  $A_{TM}$ .  $M'$  על קלט  $\langle M \rangle$  ו-  $w$ :

1. נבנה מ"ט  $M_w$  הזזה ל-  $M$  פרט לכך ש-  $M_w$  מוחקת את הקלט בסרט שלה וכותבת עליו  $w$  במקום (כלומר,  $M_w$  מתעלמת מהקלט שלה).
2. הרץ את  $H$  על  $M_w$ .
3.  $M'$  עונה כמו  $H$ .

הנכונות:

- אם  $M$  מקבלת את  $w$  אז  $M_w$  תמיד מקבלת ולכן  $H, L(M_w) = \Sigma^*$  תקבל ולכן גם  $M'$  תקבל.
  - אם  $M$  לא מקבלת את  $w$  אז  $M_w$  לעולם לא תקבל ולכן  $H, L(M_w) = \emptyset$  תדחה ולכן גם  $M'$  תדחה.
- מצאנו מ"ט המכריעה את  $A_{TM}$ , בסתירה לכך ש-  $A_{TM} \notin \text{R}$ .

## 2 מונים (Enumerators)

**2.1 הגדרה** מונה (enumerator) עבור שפה  $L$  הוא פונקציה  $f_L : \mathbb{N} \rightarrow L$  שהיא חשיבה ועל.

**2.2 משפט**  $L \in \text{RE}$  אם ורק אם יש לה מונה.

## תרגיל 6

מונה מונוטוני עבור שפה  $L$  הוא מונה כך שאם  $i < j$  אזי  $f_L(i) < f_L(j)$ . כלומר, הוא מונה את המילים בשפה בסדר לקסיקוגרפי. הוכיחו: לכל שפה אינסופית  $L \in \text{R}$ , אם יש ל-  $L$  מונה מונוטוני.

## פתרון

נוכיח את שני הכיוונים.

### כיוון ראשון

נניח כי  $L \in \mathbb{R}$ . אזי, קיימת מ"ט  $M$  המכריעה את  $L$ . נבנה מונה מונוטוני  $f_L$ : על קלט  $i$ , נריץ את  $M$  על המילים בסדר לקסיקוגרפי ונפלוט את המילה ה- $i$ ית שהתקבלה. שימו לב שמכיוון ש- $M$  מכריעה את  $L$ , היא בפרט עוצרת על כל קלט.  $f_L$  חשיבה, מחזירה את כל המילים ב- $L$  ומונוטונית.

### כיוון שני

נניח כי  $L$  שפה אינסופית ו- $f_L$  הוא מונה מונוטוני עבודה. נבנה מ"ט  $M$  המכריעה את  $L$ . על קלט  $x$ :

$$1. M \text{ תחשב את } f_L(1), f_L(2), \dots$$

2. אם היא הגיעה ל- $i$  כך ש- $f_L(i) = x$ ,  $M$  תקבל.

3. אם היא הגיעה ל- $i$  כך ש- $f_L(i) > x$ ,  $M$  תדחה.

נכונות:

- אם  $x \in L$  אזי קיים  $i$  כך ש- $f_L(i) = x$  ולכל  $j < i$ ,  $f_L(j) < x$ . לכן,  $M$  תקבל.
- אם  $x \notin L$  אזי לכל  $i$ ,  $f_L(i) \neq x$  אזי  $M$  לא תקבל. מכיוון ש- $L$  אינסופית, קיים  $y > x$  ו- $j$  כך ש- $f_L(j) = y$ . לכן, שנגיע ל- $y$  אז  $M$  תדחה.

## 7 תרגיל

הוכיחו כי לכל שפה אינסופית  $L \in \text{RE}$  קיימת שפה אינסופית  $L' \subseteq L$  כך ש- $L' \in \text{R}$ .

### פתרון

$L \in \text{RE}$  אזי קיים מונה  $f_L$  עבור  $L$ . נסתכל על הסדרה  $f_L(1), f_L(2), \dots$ . נגדיר תת סדרה מונוטונית:

$$f_L(i_1), f_L(i_2), \dots$$

כך ש- $i_1 = 1$  ו- $i_{j+1}$  הוא המספר הקטן ביותר שגדול מ- $i_j$  כך ש- $f_L(i_j) < f_L(i_{j+1})$ . כעת נגדיר

$$L' = \{g(j) \mid j \in \mathbb{N}\}$$

לפי הבנייה שלנו,  $L' \subseteq L$ ,  $L'$  היא אינסופית ו- $g$  הוא מונה מונוטוני עבודה.  $g$  חשיבה שכן אנו צריכים לחשב מספר סופי של מילים כדי להגיע ל- $g(j)$ . מהתרגיל הקודם,  $L' \in \text{R}$ .

## 3 טיעוני ספירה

### 8 תרגיל

הוכיחו כי לכל שפה אינסופית  $L$  קיימת  $L' \subseteq L$  שאינה ב- $\text{RE}$ .

### פתרון

ראינו בכיתה כי קבוצת מכונות הטורנינג היא בת מניה. תהא  $L'$  קבוצת השפות החלקיות ל- $L$ . כל תת-שפה כזו  $A \in L'$  נתנת לתיאור ע"י מחרוזת בינארית אינסופית  $b_1, b_2, \dots$  כך ש- $b_i = 1$  אם"ם המילה ה- $i$ ית ב- $A$  נמצאת ב- $L$ .

אם כך, מצאנו התאמה חח"ע ועל בין  $L'$  לסדרות בינאריות אינסופיות. קבוצת הסדרות הבינאריות האינסופיות (דהיינו, הקבוצה  $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ ) היא אינה בת-מניה, ולכן  $L'$  אינה בת מניה ולכן קיימת  $L' \in L'$  שאינה ניתנת לקבלה על ידי מכונת טורנינג.

## תרגיל 9

הוכיחו כי קיימת שפה אינסופית  $L$  כך שכל שפה אינסופית  $L' \subseteq L$  אינה כריעה.

### פתרון

תהא  $D$  קבוצת השפות האינסופיות הכריעות. מכאן, ש-  $D$  בת מניה ותהיה  $L_1, L_2, \dots$  מניה שלה. נגדיר סדרה של מספרים טבעיים  $n_0, n_1, \dots$  כך:

$$1. \quad n_0 = 0$$

2. עבור  $k \geq 1$ , תהא  $w_k$  המחרוזת הקצרה ביותר ב-  $L_k$  כך ש-  $|w_k| < n_{k-1}$  אינסופית אז בהכרח קיימת כזו).

$$3. \quad \text{נגדיר } n_k = |w_k| + 1, \text{ אזי, } n_k < |w_k| < n_{k-1}.$$

כעת, נגדיר  $L = \{1^{n_0}, 1^{n_1}, 1^{n_2}, \dots\}$  כשפה שלנו. כעת נראה כי לכל שפה אינסופית כריעה  $A$ ,  $A \not\subseteq L$  וזה יוכיח את הטענה שלנו.

נניח בשלילה שקיים  $i$  עבורו  $L_i \subseteq L$ . אזי:

$$\bullet \quad w_i \in L_i$$

$$\bullet \quad w_i \notin L \text{ ולכן } n_{i-1} < |w_i| < n_i$$

וזה בסתירה, כי מצאנו מילה שנמצאת ב-  $L_i$  אך לא ב-  $L$ .