תעודת זהות: ______________________
מספר מחברת: ______________________

מבחן מועד א' - מודלים חישוביים, סמסטר ב' תשע"ה (2015)

פתרון

בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' רונית רובינפלד, דר' יפתח הייטנר

מתרגלים: יובל מוסקוביץ', אורן זלצמן, דין דורון

25/06/15

הוראות

1. מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
2. משך הבחינה – שלוש שעות.
3. חומר עזר מותר: שני דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד עם שם התלמיד/ה.
4. **יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה).** מחברות הבחינה לא ייקראו, **וישמשו כטיוטה בלבד**.
5. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.
6. במבחן 5 שאלות.
   - הניקוד לכל שאלה מופיע לידה מספר השאלה. ציון המבחן ישוקלל לפי הנוסחא הבאה:
     - ציון שתי התשובות הטובות ביותר יוכפל ב 1.25
     - ציון התשובה הגרועה ביותר יוכפל ב 0.5
   - סימון "תשובה ריקה" יזכה בחלק (קטן) מהנקודות כמצוין ליד מספר השאלה.
   - יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון.
   - יש לענות תשובות ברורות ענייניות ותמציתיות.
7. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה או בתרגול) בתנאי שמצטטים אותה במדויק. טענות אחרות (כאלה שהוכחו בספר, בתרגיל בית, בהרצאות מהסמסטר הקודם, וכו') יש להוכיח.
8. יש להניח $P \neq NP$, אלא אם מצוין אחרת.

בהצלחה!

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

<u>שאלה 1 (20 נקודות).</u>

<u>אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)</u>

א. (5 נק'). הראה דוגמא לשפה L לא רגולרית והומומורפיזם h כך ש h(L) שפה רגולרית.

נבחר את השפה: $L = \{0^i 1^i \mid i \geq 0\}$, ואת ההומומורפיזם $h: h(0) = 0, h(1) = 0$ מתקיים כי

$h(L) = \{00\}^*$ שהינה שפה רגולרית (מסגירות לסגור קליני).

ב. (5 נק'). עבור השפה $A = L((00+1)^*)$, וההומומורפיזם $h: \{a,b\} \rightarrow \{0,1\}^*$ המוגדר ע"י $h(a) = 01,\ h(b) = 10$, מהו $h^{-1}(A)$? (אין צורך להוכיח את התשובה)

$h^{-1}(A) = L((ba)^*)$

ג. (10 נק'). עבור השפה L למטה, הראה כי היחס $\sim_L$ משרה אינסוף מחלקות על Σ^*.
L היא שפת כל המילים ("ביטויים אלגבריים") מעל $\Sigma = \{x, y, +, *, (,)\}$ המוגדרות ע"י הכללים הבאים:

1. בסיס: x ו- y נמצאים ב- L.
2. צעד אינדוקציה: אם α ו β נמצאים ב- L אז גם $(\alpha + \beta)$ ו- $(\alpha * \beta)$ נמצאים ב- L .

נבחר את אוסף המילים: $S = \{(^i x, i > 0\}$, לכל זוג מילים שונות, $(^j x, (^i x$ מתקיים כי הן נמצאות במחלקת שקילות שונה כיון שהמילה $[+x)]^i$מפרידה בינהם $((^i x + x) + x) \ldots i \text{ times} \ldots + x))$ נמצאת בשפה ואילו $(^i x + x) + x) \ldots j \text{ times} \ldots + x)$ לא).

תעודת זהות: ______________________________

מספר מחברת: ______________________________

שאלה 2 (20 נקודות).

אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ **(5 נקודות)**

תהא $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$. בשאלה זו נוכיח כי $\bar{L}$ (שימו לב – **המשלים** של L) היא שפה חסרת הקשר שאינה רגולרית.

א. הוכיחו: $\bar{L}$ אינה רגולרית (3 נק'):

נניח בשלילה ש- $\bar{L}$ רגולרית. אזי, מסגירות שפות רגולריות למשלים, L עצמה רגולרית, בסתירה לטענה שראינו בכיתה.

ב. מצאו שפות L_1, L_2, L_3 זרות אחת לשנייה כך ש- L_1 רגולרית, L_2, L_3 חסרות הקשר ואינן רגולריות, כך ש- $\bar{L} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$. אין צורך להוכיח כי השפות מקיימות את הנדרש (5 נק').

$L_1 = \{w \in \Sigma^* : \nexists i, j \;\; s.t. \; w = a^i b^j\}$

$L_2 = \{a^i b^j : i > j\}$

$L_3 = \{a^i b^j : i < j\}$

ג. כתבו ביטוי רגולרי עבור L_1. אין צורך להוכיח את נכונותו (3 נק'): $\Sigma^* \cdot b \cdot \Sigma^* \cdot a \cdot \Sigma^*$.

ד. כתבו דקדוקים חסרי הקשר עבור L_2 ו- L_3. אין צורך להוכיח את נכונותם (6 נק'):

$L_2 : S \rightarrow aSb \mid aS \mid a$

$L_3 : S \rightarrow aSb \mid Sb \mid b$

ה. בהסתמך על נכונות הסעיפים הקודמים, השלימו את ההוכחה כי $\bar{L}$ חסרת הקשר (3 נק').

הראינו כי שלוש השפות חסרות הקשר, איחודן הוא $\bar{L}$ ושפות חסרות הקשר סגורות לאיחוד.

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

שאלה 3 (20 נקודות).

אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)

הגדרה: גרף לא מכוון G= (V,E) הוא $3parite$ (תלת צדדי), אם V ניתן לחלוקה לשלוש קבוצות V_1, V_2 ו V_3 (כלומר $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V$ ו $V_i \cap V_j = \emptyset \ \forall i \neq j$) כך שכל אחת מהן היא Independent set ב G.

יהי $3HamPath = \{< G,s,t >: G \text{ is } 3parite \text{ and } \exists \text{ hamilonian path from } s \text{ to } t \text{ in } G\}$.

נראה כי $3HamPath$ היא ב NPC

א. הוכח כי $3HamPath$ היא ב NP (4 נק').

העד הוא חלוקה של צמתי V ל V_1 V_2 ו V_3 ומסלול. המוודא בודק כי החלוקה תקינה (שלושת הקבוצות הן Independent set ב G), ושהמסלול הוא מסלול המילטוני מ s ל t.

ב. הראה כי $3HamPath \leq_p$ UnHamPath . (UnHamPath היא הגרסה הלא מכוונת של HamPath).

1. הרדוקציה (8 נק'):

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$ צמתים s ו t, הרדוקציה f תחזיר את הגרף הלא מכוון $G' = (V', E')$ והצמתים s' ו t', הבאים:

$V' = \{(v^L, v^M, v^R \ : v \in V\}$

$E' = \{(v^L, v^M), (v^M, v^R): v \in V\} \cup \{(v^R, u^L): (u, v) \in E\}$

$s' = s^L$ ו $t' = t^R$.

2. הוכחת נכונות הרדוקציה (8 נק'):

ברור כי הרדוקציה רצה בזמן פולינומי. כמו כן ברור כי לכל G הגרף G' הוא $3parite$ ($V'_1 = \{v^L: v \in V\}$, $V'_2 = \{v^M: v \in V\}$ ו $V'_3 = \{v^R: v \in V\}$).

נניח $< G,s,t > \in UnHamPath$, ויהי $(s, x_1, \ldots x_k, t)$ עדות לכך.
קל לוודא כי כשמחליפים במסלול שלעיל כל צמת v בשלישיה הסדורה (v^L, v^M, v^R)
מקבלים מסלול המילטוני מ s^L ל t^R ב G'.
בגלל ש G' הוא גם $3parite$. קבלנו כי $< G', s', t' > \in 3HamPath$.

נניח $< G', s', t' > \in 3HamPath$, ויהי $(s', x_1, \ldots x_k, t')$ עדות לכך. מאחר והמסלול חייב לבקר בצמתים v_{In} ומאחר ו G' הוא $3parite$, נובע כי המסלול שלעיל הוא מהצורה $(s^L, s^M, s^R, x_1^L, x_1^M, x_1^R, \ldots, x_t^L, x_t^M, x_t^R, , t^L, t^M, t^R)$.
קל לוודא שאם במסלול שלעיל נחליף כל שלישיה (v^L, v^M, v^R) בצמת v, נקבל מסלול המילטוני ב G.
כלומר, $< G,s,t > \in UnHamPath$.

תעודת זהות: ____________________

מספר מחברת: ____________________

שאלה 4 (20 נקודות).
אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)

בשני הסעיפים הבאים, $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^\star$ מעל Σ, א"ב סופי כלשהו.

א. הוכיחו/הפריכו: קיימות שפות L_1, L_2, L_3 מעל $\Sigma = \{0,1\}$ כך ש- $L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3$, $L_1, L_3 \in \mathcal{P}$ ו- $L_2 \in \mathcal{NPC}$ (6 נק').

הטענה נכונה. נקח $L_1 = \emptyset, L_3 = \Sigma^\star, L_2 = \text{SAT}$.

ב. הוכיחו/הפריכו: קיימות שפות L_1, L_2, L_3 מעל $\Sigma = \{0,1\}$ כך ש- $L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3$, $L_1, L_3 \in \mathcal{NPC}$ ו- $L_2 \in \mathcal{P}$ (14 נק').

הטענה נכונה.

פתרון אפשרי:

$L_1 = \{\langle 0, \varphi \rangle \mid \varphi \in \text{SAT}\}$

$L_2 = \{\langle 0, x \rangle \mid x \in \Sigma^\star\}$

$L_3 = \{\langle 0, x \rangle \mid x \in \Sigma^\star\} \cup \{\langle 1, \varphi \rangle \mid \varphi \in \text{SAT}\}$

נותן להוכיח, ע"י רדוקציות פשוטות מ- SAT וטיעון טריוויאלי שהן ב- NP, ש- L_1 ו- L_3 הן NP-שלמות. L_2 ב- P גם באופן טריוויאלי.

תעודת זהות: ____________________

מספר מחברת: ____________________

שאלה 5 (20 נקודות).

אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)

בשאלה זו כל השפות הן מעל $\Sigma = \{0,1\}$ ו- $\mathbb{N}$ מסמן את קבוצת המספרים הטבעיים (כולל 0).

א. עבור k, מספר שלם חיובי, נגדיר את השפה

$$L_k = H_{TM,\varepsilon} \cap \Sigma^k$$

הוכיחו: $L_k \in \mathcal{R}$ (4 נק').

מתקיים כי $|L_k| \leq 2^k$ ולכן L_k סופית וכל שפה סופית היא ב- $\mathcal{R}$.

ב. הוכיחו/הפריכו: קיימת פונקציה מלאה וחשיבה $f: \mathbb{N} \to \Sigma^\star$ כך שמתקיים: $f(k) = \langle M_k \rangle$ הוא קידוד של מ"ט M_k המכריעה את L_k (8 נק').

הטענה לא נכונה. נניח בשלילה שקיימת כזו, ונראה כיצד להכריע את $H_{TM,\varepsilon}$ ע"י מ"ט M_H, שעל קלט $\langle M \rangle$:

- בודקת אם הקלט הוא קידוד חוקי של מ"ט. אם לא, דוחה.
- מחשבת את $|\langle M \rangle|$, נסמנו ב- m.
- מחשבת את $M' = f(m)$.
- מריצה את M' על $\langle M \rangle$ ועונה כמוהה.

אם $\langle M \rangle \in H_{TM,\varepsilon}$ אז $\langle M \rangle \in L_m$. מכך ש- M' מכריעה את L_m נובע שעל $\langle M \rangle$ היא תקבל (ותעצור) ולכן גם M_H. אם $\langle M \rangle \notin H_{TM,\varepsilon}$ אז באופן אופן $\langle M \rangle \notin L_m$ ו- M_H תדחה (ותעצור).

ג. קבעו האם השפה הבאה נמצאת ב- $\mathcal{R}$, ב- $\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$ או שאינה ב- $\mathcal{RE}$. הוכיחו תשובתכם (8 נק').

$$L = \{\langle M \rangle :\ M \text{ is a Turing machine and } L(M) \cap H_{TM,\epsilon} \neq \emptyset\}$$

השפה היא ב- $\mathcal{R} \setminus \mathcal{RE}$. תחילה נראה שהשפה נמצאת ב- $\mathcal{RE}$. תהא M_H מ"ט המקבלת את $H_{TM,\epsilon}$. נראה מ"ט M_L שמקבלת את L. M_L על קלט $\langle M \rangle$:

- בודקת אם $\langle M \rangle$ הוא קידוד חוקי של מ"ט. אם לא, דוחה.
- מריצה בהרצה מבוקרת, כפי שראינו בהרצאות ובתרגולים, בסדר לקסיקוגרפי את כל המילים w מעל Σ ולכל w מריצה במקביל הן את M והן את M_H.
- אם בשלב כלשהו בהרצה שתי המכונות קיבלו, M_L מקבלת.

ברור שבמקרה ש- M_L מקבלת אז $\langle M \rangle \in L$ (כי מצאנו מילה משותפת ולכן החיתוך אינו ריק). אם $\langle M \rangle \notin L$ אז M_L לעולם לא תעצור, ובפרט לא תקבל.

כדי להוכיח שהיא אינה ב- $\mathcal{R}$, נסתכל על התכונה $C = \{L \subseteq \Sigma^\star \mid L \cap H_{TM,\epsilon} \neq \emptyset\}$. היא תכונה של שפות שאינה טריוויאלית (בפרט, השפה הריקה לא נמצאת בה והמלאה כן) ולכן $L_C = L \notin \mathcal{R}$.