תעודת זהות: ______________________________

מספר מחברת: ______________________________

1	2	3	4	סהב

מבחן מועד א' - מודלים חישוביים, סמסטר ב' תשע"ו (2016)

פתרון

בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' רונית רובינפלד, פרופ' יפתח הייטנר

מתרגלים: יובל מוסקוביץ', אורן זלצמן, דין דורון

17/06/16

הוראות

1. מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
2. משך הבחינה – שלוש שעות.
3. חומר עזר מותר: שני דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד עם שם התלמיד/ה.
4. **יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה).** מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיוטה בלבד.
5. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.
6. במבחן 4 שאלות.
   - הניקוד לכל שאלה מופיע לידה מספר השאלה.
   - סימון "תשובה ריקה" יזכה בחלק (קטן) מהנקודות כמצוין ליד מספר השאלה.
   - יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון.
   - יש לענות תשובות ברורות ענייניות ותמציתיות.
7. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה או בתרגול) בתנאי שמצטטים אותה במדויק. טענות אחרות (כאלה שהוכחו בספר, בתרגיל בית, בהרצאות מהסמסטר הקודם, וכו') יש להוכיח.
8. יש להניח $P \neq NP$, אלא אם מצוין אחרת.

בהצלחה!

תעודת זהות: ______________________________

מספר מחברת: ______________________________

<u>שאלה 1 (25 נקודות).</u>

<u>אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה)</u> ☐ **<u>(5 נקודות)</u>**

תהי L שפה רגולרית. הוכח שהשפות הבאות רגולריות:

א. (10 נק'). $ADD(L) = \{ xwy \mid x, y \in \Sigma^*, w \in L \}$

קל לראות ש $ADD(L) = \Sigma^* L \Sigma^*$, ומסגירות שפות רגולריות לשרשור נובע ש $ADD(L)$ רגולרית

ב. $SUB(L) = \{ w \mid x, y \in \ \Sigma^*, xwy \in L \}$

L רגולרית, לכן קיים אוטומט $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ כך ש $L(M) = L$. נבנה אוטומט א"ד $M' = (Q', \Sigma, \delta', s, F')$ עבור $SUB(L)$. הרעיון הוא להוסיף מצב התחלתי חדש וממנו מעברי אפסילון לכל מצב שנגיש מהמצב ההתחלתי המקורי, המעברים האלה מתאימים לדילוג של ה x. בנוסף נוסיף מצב מקבל a ומעברי אפסילון מכל מצב ב Q שממנו אפשר להגיע למצב מקבל כלשהו. המעברים האלה מתאימים לדילוג על ה y. באופן פורמאלי:

$Q' = \ Q \cup \{s, a\}$

$F' = \ \{a\}$

$\delta'(q, \sigma) = \{\delta\ (q, \sigma)\} \qquad \forall \sigma \in \Sigma \ and \ q \in Q$

$\delta'(s, \varepsilon) = \{q \mid q \ is \ reachable \ from \ q_0\}$

$\delta'(q, \varepsilon) = \{a\} \ \forall q \ s.t. \ \exists \ q_f \in F \ and \ q_f is \ reachable \ from \ q$

נראה ש $L(M') = \ SUB(L)$.
תהי $w \in SUB(L)$. מההגדרה, קיימות $x, y \in \Sigma^*$ כך ש $xwy \in L = L(M)$. כלומר הריצה של M על xwy מסתיימת במצב מקבל. יהי q_x המצב אליו מגיעה M לאחר קריאת x. כלומר, q_x הוא מצב נגיש מ q_0, לכן $q_x \in \delta'(s, \varepsilon)$. בנוסף, מהבנייה $\hat{\delta}(q_x, w) \in \widehat{\delta'}(q_x, w)$. נסמן $\hat{\delta}(q_x, w) = q_y$. $\hat{\delta}(q_y, y) \in F$ כיוון שהריצה של M על xwy מסתיימת במצב מקבל, לכן $\widehat{\delta'}(q_y, \varepsilon) \in F'$. כלומר $\widehat{\delta'}(s, w) \in F'$ ולכן $w \in L(M')$

תהי $w \in L(M')$. לכן קיימת ריצה של M' על w מסתיימת במצב מקבל. נסתכל על ריצה כזו $s \overbrace{\to}^{\varepsilon} q_1 \overbrace{\to \cdots \to}^{w} q_n \overbrace{\to}^{\varepsilon} a$. מהבניה $q_1 \in Q$ והוא מצב נגיש מ q_0. לכן קיימת מילה $x \in \Sigma^*$ כך ש $\hat{\delta}(q_0, x) = q_1$. כמו כן $q_n \in Q$ ויש ב M מסלול מ q_n למצב מקבל. כלומר קיים $y \in \Sigma^*$ כך ש $\hat{\delta}(q_n, y) \in F$. בנוסף, מתקיים ש $\hat{\delta}(q_1, w) \in \ \widehat{\delta'}(q_1, w)$ ולכן $\hat{\delta}(q_0, xwy) \in F$

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

<u>שאלה 2 (25 נקודות).</u>

<u>אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה)</u> ☐ **<u>(5 נקודות)</u>**

עבור כל אחד מהסעיפים הבאים, קבע/י האם השפה הנתונה הינה חסרת הקשר. הוכח/י את תשבתך.

א. (10 נק'). $L = \{ w\#x \mid w,x \in \Sigma^*, x \text{ תת מחרוזת של } w^R \}$

כאן, w^R מתאר את המילה w כתובה מהסוף להתחלה

השפה חסרת הקשר. מילים בשפה הינם מהצורה $w\#\Sigma^* w^R \Sigma^*$. נבנה דקדוק לשפה ע"י זוג משתנים, A ו-B. A יגזור את החלק של המילה מהצורה $w\#w^R$ ואילו B יגזור את Σ^*. כלומר, נרצה גזירה מהצורה:

$S \to AB \to^* wAw^R \to^* w\#\Sigma^* w^R \Sigma^*$. נגדיר את כללי הגזירה הבאים:

$S \to AB$

$A \to 0A0 \mid 1A1 \mid \#B$

$B \to 0B \mid 1B \mid \varepsilon$

כל עוד הגזירה של A לא מסתיימת בכלל B#, אנו מקבלים מילה מהצורה ww^R (זה כולל את המקרב בו w הינה המילה הריקה). כיון ש-B גוזר מילים מהצורה Σ^*, והוא מופיע לאחר A (ע"פ כלל הגזירה הראשון) ובאמצע של ww^R (לאחר #) נקבל את כל המילים ב-L.

ב. (10 נק'). $L = \{ w\#x \mid w,x \in \Sigma^*, x \text{ תת מחרוזת של } w \}$

השפה אינה חסרת הקשר. נוכיח ע"י למת הניפוח. יהי p קבוע הניפוח ונבחר את המילה $0^p 1^p \# 0^p 1^p$. אשר נמצאת בשפה ואורכה גדול מ-p. נסתכל על כל חלוקה uvxyz של המילה ונראה שניתן לנפחה ולהגיע למילים שאינן בשפה. נפריד לשלושה מקרים אפשריים:

1) אם vxy נמצא כולו לפני התו #, נסתכל על ניפוח ע"י i=2, כלומר על המילה uv^2xy^2z. מתקיים שהחלק לפני התו # באורך 2p+|vy| > 2p, ואילו החלק שאחרי התו באורך 2p. לכן לא יכול להתקיים שהחלק לפני התו # הוא תת מחרוזת של החלק שאחרי #.
2) אם vxy נמצא כולו אחרי התו #, נסתכל על ניפוח ע"י i=0, כלומר על המילה uv^0xy^0z. מתקיים שהחלק אחרי התו # באורך 2p-|vy| < 2p, ואילו החלק שלפני התו באורך 2p. לכן לא יכול להתקיים שהחלק לפני התו # הוא תת מחרוזת של החלק שאחרי #.
3) אם vxy מכיל את התו #, נחלק שוב למקרים.
   a. אם התו # אינו מוכל ב-x, אזי ניפוח ע"י i=2, יגרור מילה בה יש 2 תווי # והמילה לא בשפה
   b. אם התו # אינו מוכל ב-x, אזי כיון ש- |vxy| < p+1, אז v כולל רק אחדות או y כולל רק אפסים (או שניהם). במקרה הראשון, ניפוח למעלה (i=2), יביא שמספר האחדות בחלק שלפני # גדול ממספר האחדות אחריו ולכן לא יכול להתקיים שהוא תת מחרוזת של החלק שאחרי #. באופן דומה, במקרה השני ננפח למטה (i=0), ונקבל שמספר האפסים אחרי # קטן ממספר האפסים לפי #.

תעודת זהות: ______________________________

מספר מחברת: ______________________________

שאלה 3 (25 נקודות).

אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)

תהינה A,B שפות מעל $\Sigma=\{0,1\}$. הוכיחו/הפריכו:

א. (10 נק'). תהינה A,B שפות מעל $\Sigma=\{0,1\}$. הוכיחו/הפריכו: אם קיימת פונקציה חשיבה וחד-חד-ערכית $f: A \to B$ אז $A \le_m B$.

הטענה לא נכונה. תהא $A = A_{TM}$ ו- $B = \Sigma^*$. פונקצית הזהות היא חשיבה, חח"ע ואכן מ- A ל- B, כי $A_{TM} \subseteq \Sigma^*$. יחד עם זאת, $A \notin \mathcal{R}$ אך $B \in \mathcal{R}$ ולכן לא יתכן כי $A \le_m B$.

ב. (15 נק') תהא L השפה הבאה מעל $\Sigma=\{0,1\}$:

$$L = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is a TM and } \forall\, x \in \Sigma^*, M \text{ on } x \text{ runs at most } |x|^2 \text{ steps}\}$$

קבעו האם L שייכת ל- $\mathcal{R}$, ל- $\mathcal{RE}\setminus\mathcal{R}$, ל- $\mathrm{co}\mathcal{RE}\setminus\mathcal{R}$ או שהיא אינה ב- $\mathcal{RE}\cup\mathrm{co}\mathcal{RE}$. הוכיחו תשובתכם.

התשובה היא ש L שייכת ל- $\mathcal{R}$. המכריע מחזיר כן אםם המצב ההתחלתי ב M הוא מצב מקבל.
הנכונות נובעת מכך ש *מצב ההתחלתי הוא מצב מקבל* הוא תנאי הכרחי ומספיק לכך שM עוצרת על כל המילים, ובפרט על המילה הריקה, ב $|x|^2$ צעדים.
אם מאפשרים ל M לרוץ יותר מ 0 צעדים על המילה הריקה, אזי משנים את המכריע שיחזיר כן אםם המצב ההתחלתי ב M הוא מצב מקבל או ש M (תמיד) עוברת למצב מקבל אחרי קריאת התו הראשון, כעת הנכונות נובעת מכך *שמעבר הבדיקה שלעיל היא* תנאי הכרחי ומספיק לכך שM עוצרת על כל המילים, ובפרט על המילה באורך 1, ב $|x|^2$ צעדים.

(ראו המשך תשובה בדף הבא)

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

אך זאת לא התשובה שהתכוונו אליה... ההגדרה "הנכונה" של L (שמובילה לפתרון שכיוונן אליו) היא

$$L' = \{M \mid M \text{ is a TM and } \forall\, x \in \Sigma^\star \; with \; |x| > 2\,, M \text{ on } x \text{ runs at most } 4 \cdot |x|^2 \text{ steps}\}$$

השפה L' שייכת ל $\text{co}\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$.

ראשית קל לראות ש- $\overline{L'} \in \mathcal{RE}$ ולכן $L' \in \text{co}\mathcal{ER}$ (השלימו לבד את הפרטים). נסיים את ההוכחה בכך שנראה כי $\overline{H_{TM}} \leq_m L'$ (ולכן L' לא ב $\mathcal{R}$).

פונקציית הרדוקציה f תוגדר באפן הבא.

בהינתן קלט y, אם y אינו קידוד של מכונת טורינג ומילה w, החזר איבר כלשהו מ L'. אחרת, תהי M ו w מכונת הטורינג והמילה ש y מקודד. החזר את תיאור מכונת הטורינג M_w הבאה:

המכונה M_w :

על קלט x,

1. אם x באורך פחות מ w , עצור וקבל.
2. רשום את המחרוזת $\#w$ לאחר x
3. חזור לתו הראשון של w
4. התחל בהרצת M על w, לאחר כל צעד מחק תו מ x (לשם כך סמן את מיקום הראש של M על הסרט, כדי שתוכל להמשיך באמולציה מהיכן שהפסיקה)
5. עצור אם כל x נמחק
6. הכנס ללולאה אינסופית אם M עוצרת על w (לפני שכל x נמחק)

קל לראות ש f חשיבה (computable)

נשים לב כי אם M לא עוצרת את w, אזי M_w רצה לכל היותר $4 \cdot |x|^2$ צעדים (האמת שפחות). ראו שאתם יודעים להוכיח זאת.

מכן נובע (למה?) כי $\overline{H_{TM}} \ni y \Leftrightarrow L' \ni f(y)$.

ודאו שאתם מבינים הרדוקציה לא עובדת אם מחליפים את L' ב L .

(אף על פי שזאת תשובה לא נכונה) יינתנו מירב הנקודות למי ש"הוכיח" באפן הזה כי L שייכת ל $\text{co}\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$.

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

שאלה 4 (25 נקודות).

אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)

בשאלה זו נעסוק בגרפים פשוטים ולא מכוונים. יהא $G = (V, E)$ גרף כזה. נזכר כי בעיית *מעגל המילטון* (HC) היא להכריע, בהנתן הקידוד של G, האם ב- G יש מעגל המילטוני.
בעיית *מסלול המילטון* (HP) היא להכריע, בהנתן הקידוד של G, האם ב- G יש מסלול המילטוני:

$$HP = \{\langle G\rangle \mid G \text{ is a simple undirected graph that has a Hamiltonian path}\}$$

שימו לב שההגדרה לבעיה זו מעט שונה מזו שראינו בכיתה, ששם היו נתונים צמתי התחלה וסיום s, t כחלק מהקלט.

א. (5 נק'). הוכיחו כי $HP \in \mathcal{NP}$.

נוכיח בעזרת מוודא פולינומי דטרמיניסטי. V על קלט $\langle G\rangle, c$ יבדוק ש- $\langle G\rangle$ הוא קידוד חוקי של גרף פשוט ולא מכוון ו- c מקודד רשימה מסודרת של צמתי G (ואם לא – ידחה). כעת, V יבדוק שכל צמתי הגרף נמצאים ברשימה ושאכן קיים מסלול ביניהם. השלימו את הנכונות בעצמכם.

ב. (15נק'). הוכיחו כי $HC \leq_p HP$.

בהנתן קידוד של גרף לא מכוון $G = (V, E)$ (יש לטפל בקידוד לא חוקי בנפרד), יהא $v \in V$ הצומת הראשון. הרדוקציה תחזיר $G' = (V', E')$ כך ש-

7. $V' = V \cup \{v', s, t\}$ (s, t, v' חדשים).
8. כל הקשתות המקוריות קיימות ב- E'.
9. אל v' נחבר את כל הצמתים שהיו מחוברים ל- v בגרף המקורי. נוסיף את הקשתות $\{s, v\}$ ו- $\{t, v'\}$.

נכונות:

- ברור כי הרדוקציה היא פולינומית, שכן אנו מוסיפים לקידוד קיים רק שלושה צמתים ו- $O(|E|)$ קשתות.
- נניח שב- G יש מעגל המילטוני. אזי, ניתן לרשום אותו בצורה $v, u, \dots, u', v$ כך ש- $u, \dots, u'$ הוא מסלול העובר בכל הצמתים פרט ל- v. ואז, ודאי כי אכן $s, v, u, \dots, u', v', t$ הוא מסלול המילטוני ב- G'.
- נניח שב- G' יש מסלול המילטוני, אז קל לראות שבהכרח s ו- t הם קצוות המסלול כי דרגתם 1. לכן, ע"י כיוון, המסלול הוא מהצורה $s, v, y, \dots, y', v', t$. אבל אז, ב- G יש את המעגל ההמילטוני $v, y, \dots, y', v$.

ג. (5 נק'). הוכיחו **בקצרה** (מבלי להוכיח נכונות הרדוקציה) כי $HP \leq_p HC$.

בהנתן קידוד של גרף לא מכוון $G = (V, E)$ (יש לטפל בקידוד לא חוקי בנפרד), הרדוקציה תחזיר קידוד של גרף $G' = (V', E')$ כך ש- $V' = V \cup \{v\}$ (v הוא חדש) ו- $E' = E \cup \big\{\{u, v\} | u \in V\big\}$.
כלומר, נוסיף קשת מכן צומת בגרף המקורי אל הצומת החדש.
נכונות:

- ברור כי הרדוקציה היא פולינומית, שכן אנו מוסיפים לקידוד קיים רק צומת אחד ו- $|V|$ קשתות.
- נניח שב- G יש מסלול המילטוני, $v_1, \dots, v_n$. נטען ש- $v_1, \dots, v_n, v, v_1$ הוא מעגל המילטוני. מקיום המסלול ב- G והוספת הקשתות, ברור כי $v_1, \dots, v_n, v, v_1$ הוא מעגל. כמו כן, במסלול המקורי הופיעו כל הצמתים בדיוק פעם אחת, ולכן במעגל החדש יופיעו גם כל הצמתים פעם אחת.
- נניח שב- G' יש מעגל המילטוני $v_1, \dots, v_n, v, v_1$. נטען ש- $v_1, \dots, v_n$ הוא מסלול המילטוני. שוב, ברור שכל הצמתים מופיעים רק פעם אחת ומכיוון שהקשתות היחידות שנוספו הן קשתות קשורות ל- v הרי ש- $v_1, \dots, v_n$ הוא גם מסלול תקין ב- G.