תעודת זהות: ____________________

מספר מחברת: ____________________

1	2	3	4	סהב

מבחן מועד ב' - מודלים חישוביים, סמסטר ב' תשע"ו (2016)

פתרון

בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' רונית רובינפלד, פרופ' יפתח הייטנר

מתרגלים: יובל מוסקוביץ', אורן זלצמן, דין דורון

31/07/16

הוראות

1. מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
2. משך הבחינה – שלוש שעות.
3. חומר עזר מותר: שני דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד עם שם התלמיד/ה.
4. **יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה).** מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיוטה בלבד.
5. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.
6. במבחן 4 שאלות.
   - הניקוד לכל שאלה מופיע לידה מספר השאלה.
   - סימון "תשובה ריקה" יזכה בחלק (קטן) מהנקודות כמצוין ליד מספר השאלה.
   - יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון.
   - יש לענות תשובות ברורות ענייניות ותמציתיות.
7. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה או בתרגול) בתנאי שמצטטים אותה במדויק. טענות אחרות (כאלה שהוכחו בספר, בתרגיל בית, בהרצאות מהסמסטר הקודם, וכו') יש להוכיח.
8. יש להניח $P \neq NP$, אלא אם מצוין אחרת.

בהצלחה!

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

שאלה 1 (25 נקודות).

אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)

נגדיר את האופרטור Perfect shuffle על השפות L_1 ו- L_2 באופן הבא

$$PS(L_1,L_2) = \{ w = x_1 y_1 \cdots x_n y_n \mid w_1 = (x_1 \cdots x_n) \in L_1, w_2 = (y_1 \cdots y_n) \in L_2, \forall i \; x_i, y_i \in \Sigma \}$$

לדוגמא, עבור $L_1 = \{1,00,110\}$ ו $L_2 = \{0,11\}$ מתקיים $PS(L_1,L_2) = \{10,0101\}$

הוכיחו שאם L_1 ו- L_2 רגולריות אז $PS(L_1,L_2)$ רגולרית

L_1 ו L_2 רגולריות, לכן קיימים $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0^1, F_1)$ ו $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_0^2, F_2)$ כך ש $L(M_1) = L_1$ ו $L(M_2) = L_2$. נבנה אוטומט $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ עבור $PS(L_1,L_2)$. הרעיון הוא לבנות אוטומט שמבצע לסירוגין צעד של M_1 וצעד של M_2. לשם כך נשמור את המצב הנוכחי בכל אחד מהאוטומטים ובנוסף, באיזה מהם יש לבצע את הצעד הבא. מילה מתקבלת באוטומט החדש אם בסיום הריצה שני האוטומטים המקוריים הגיעו למצב מקבל, והצעד הבא צריך להתבצע ב M_1 (כלומר הצעד האחרון התבצע ב M_2). באופן פורמאלי:

$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \{1,2\}$$

$$q_0 = (q_0^1, q_0^2, 1)$$

$$F = F_1 \times F_2 \times \{1\}$$

$$\delta\big((q,r,1),\sigma\big) = (\delta_1(q,\sigma), r, 2)$$

$$\delta((q,r,2),\sigma) = (q, \delta_2(r,\sigma), 1)$$

נראה ש $L(M) = PS(L_1,L_2)$.

$$w = x_1 y_1 \cdots x_n y_n \in L(M) \Leftrightarrow \exists q_0, \ldots q_n \in Q_1 \; and \; r_0, \ldots, r_n \in Q_2 \; s.t.$$

$$q_0 = q_0^1, \; r_0 = q_0^2$$

$$\delta_1(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1}$$

$$\delta_2(r_i, y_{i+1}) = r_{i+1}$$

$$q_n \in F_1, \; r_n \in F_2$$

$$\Leftrightarrow \; w_1 = (x_1 \cdots x_n) \in L_1, w_2 = (y_1 \cdots y_n) \in L_2 \; \Leftrightarrow \; w = x_1 y_1 \cdots x_n y_n \in PS(L_1,L_2)$$

תעודת זהות: ______________________________

מספר מחברת: ______________________________

שאלה 2 (25 נקודות)
אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)

תהא

א. (15 נק'). הראו כי השפה L חסרת-הקשר (CFL). אין צורך להוכיח בניות, אך יש לציינן מפורשות.

קיים הדקדוק חסר ההקשר הבא המקבל אותה:

$S \rightarrow S_1|S_2$
$S_1 \rightarrow aS_1b|\varepsilon$
$S_2 \rightarrow aS_2bb|\varepsilon$

ב. (10 נק') תהא detCFL מחלקת השפות חסרות ההקשר אשר קיים אוטומט מחסנית דטרמיניסטי המקבל אותן.

ידוע כי $\bar{L}$ אינה ח"ה ואין צורך להוכיח זאת. השתמשו בעובדה זו כדי להוכיח ש- $L \notin \mathrm{detCFL}$ (כמובן שכל הוכחה נכונה אחרת תתקבל גם כן).

תעודת זהות: ____________________

מספר מחברת: ____________________

שאלה 3 (25 נקודות).

אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)

א. (10 נק'). תהינה A,B שפות מעל $\Sigma = \{0,1\}$. הוכיחו/הפריכו: אם $A \leq_m B$ אז קיימת פונקציה חשיבה וחד-חד-ערכית $f: A \to B$.

הטענה לא נכונה. תהא $A = \{0,1\}$ ו- $B = \{0\}$. מתקיים ש- $A \leq_m B$ (השלימו את הרדוקציה) אך לא יתכן שקיימת פונקציה חח"ע $f: A \to B$ כי $|A| > |B|$.
חלקכם פתרתם את הסעיף בכך שנימקתם שפונקצית הרדוקציה עצמה אינה חח"ע, אך שימו לב שזו לא היתה השאלה. רוב הרדוקציות שלמדנו משפות אינסופיות לשפות אינסופיות אינן חח"ע, אך קיימת ביניהן פונקציה חח"ע משיקולי עוצמות.

ב. (15 נק'). תהא L השפה הבאה מעל $\Sigma = \{0,1\}$:

$$L = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1 \text{ and } M_2 \text{ are TMs and } L(M_1) \leq_m L(M_2)\}$$

קבעו האם L שייכת ל- $\mathcal{R}$, ל- $\mathcal{ER} \setminus \mathcal{R}$, ל- $\text{co}\mathcal{ER} \setminus \mathcal{R}$ או שהיא אינה ב- $\mathcal{ER} \cup \text{co}\mathcal{ER}$. הוכיחו תשובתכם.

השפה אינה ב- $\mathcal{RE} \cup \text{co}\mathcal{RE}$. תהא M_ε מ"ט שעל קלט x, אם x אינו קידוד חוקי של מ"ט דוחה, ואחרת מריצה את x על ε ועונה כמוה. כמו כן, תהא M_1 מ"ט המכריעה את השפה $\{1\}$.

נראה תחילה ש- L אינה ב- $\text{co}\mathcal{RE}$ ע"י כך שנוכיח $A_{TM} \leq_m L$. הרדוקציה: $f(\langle M \rangle, w)$ מחזירה No Instance כלשהו של L (קל לקבוע מראש כזה) אם $\langle M \rangle$ אינו קידוד חוקי של מ"ט. אחרת, $f(\langle M \rangle, w)$ מחזירה את הקידוד $\langle M_\varepsilon, M_w \rangle$ כך ש- M_w על קלט x:

- סמלץ את M על w.
- אם M דחתה, דחה.
- אם M קיבלה, סמלץ את M_ε על x וענה כמוה.

נכונות:

- f חשיבה – בדיקת חוקיות של קידוד ניתנת לביצוע בזמן סופי, וכך גם כתיבת הקידוד של M_w.
- אם $\langle M \rangle$ הוא קידוד של מ"ט חוקית ו- M מקבלת את w אז על קלט x, M_w תמסלץ את M_ε על x ותענה כמוה, כלומר $L(M_w) = A_{TM,\varepsilon}$. מכיוון ש $A_{TM,\varepsilon} \leq_m A_{TM,\varepsilon}$, קיבלנו $\langle M_\varepsilon, M_w \rangle \in L$.
- אם $\langle M \rangle$ אינו קידוד חוקי אז $f(\langle M \rangle, w) \notin L$. אם M אינה מקבלת את w אז בין אם אינה עוצרת ובין אם דוחה, $L(M_w) = \emptyset$ ולא מתקיים $A_{TM,\varepsilon} \leq_m \emptyset$, לכן $\langle M_\varepsilon, M_w \rangle \notin L$.

כעת נראה ש- L אינה ב- $\mathcal{RE}$ ע"י כך שנוכיח $\overline{A_{TM}} \leq_m L$. הרדוקציה: $f(\langle M \rangle, w)$ מחזירה Yes Instance כלשהו של L (קל לקבוע מראש כזה) אם $\langle M \rangle$ אינו קידוד חוקי של מ"ט, ואחרת מחזירה את הקידוד $\langle M_1, M' \rangle$ כך ש- M' על קלט x:

- אם $x = 1$, קבל.
- סמלץ את M על w וענה כמוה.

נכונות:

- f חשיבה – בדיקת חוקיות של קידוד ניתנת לביצוע בזמן סופי, וכך גם כתיבת הקידוד של M'.
- אם $\langle M \rangle$ אינו קידוד של מ"ט אז $f(\langle M \rangle, w) \in L$. אם M אינה מקבלת את w אז $L(M') = \{1\}$ ואכן $\langle M_1, M' \rangle \in L$ כי הן מקבלות את אותה שפה.
- אם M מקבלת את w אז $L(M') = \Sigma^*$ ולא מתקיים $\{1\} \leq_m \Sigma^*$ (כי Σ^* טריוויאלית), לכן $\langle M_1, M' \rangle \notin L$.

תעודת זהות: ______________________
מספר מחברת: ______________________

שאלה 4 (25 נקודות).
אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)

א. (10 נק'). נגדיר

$T = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ is a propositional formula that is true for all assignments}\}$

ידוע כי T היא $\mathrm{co}\mathcal{NP}$-שלמה. הוכיחו: אם $\mathrm{SAT} \leq_p T$ אז $\mathcal{NP} = \mathrm{co}\mathcal{NP}$. זכרו שיש להוכיח כל טענה שלא הוכחה בהרצאה או בתרגול.

מכך ש- $\mathrm{SAT} \leq_p T$ נסיק כי $T \in \mathcal{NP}$ ולכן $\bar{T} \in \mathrm{co}\mathcal{NP}$. תהא $A \in \mathrm{co}\mathcal{NP}$. אזי, מתקיים ש- $A \leq_p T$ ו- ולכן גם $\bar{A} \leq_p \bar{T}$ ולכן $\bar{A} \in \mathrm{co}\mathcal{NP}$ ו- $A \in \mathcal{NP}$. הכיוון השני נובע ישירות מהראשון אם נסתכל על $\bar{A}$.

ב. (15 נק'). נזכור כי השפה

$HP = \{\langle G\rangle \mid G \text{ is a } \mathit{directed} \text{ graph that has a Hamiltonian path}\}$

היא ב- $\mathcal{NPC}$ (שימו לב כי הגרף מכוון). נתונה השפה הבאה:

$L = \{\langle G\rangle \mid G \text{ is a directed graph}, G \text{ contains a cycle } \mathit{and} \ \langle G\rangle \in HP\}$

הוכיחו כי היא $\mathcal{NP}$-קשה.

נוכיח ע"י רדוקציה מ- HP. בהנתן קידוד חוקי של גרף $G = \langle V, E\rangle$ (בקידודים לא חוקיים יש לטפל בנפרד), נגדיר $G' = \langle V', E'\rangle$ כך ש-

$V' = V \cup \{v_1, v_2, v_3\}$

$E' = E \cup \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\} \cup \{(v_1, u) \mid u \in V\}$

כך ש- v_1, v_2, v_3 הם צמתים חדשים. הפולינומיות של הרדוקציה ברורה, נוכיח נכונות.

אם ב- G יש מסלול המילטוני P ב- G אז מתקיים ש- $v_2 \sim v_3 \sim v_1 \sim P$ הוא מסלול המילטוני ב- G'.
כמו כן, ב- G' יש תמיד מעגל (בגודל 3) ולכן בסה"כ $\langle G'\rangle \in L$.

אם $\langle G'\rangle \in L$ אז הוא בהכרח צריך להתחיל מצמתים "ישנים" ולסיים בצמתים "חדשים" מכיוון שהכיוון הוא רק מצמתים ישנים לחדשים. בפרט, הוא חייב להיות מהצורה $v_2 \sim v_3 \sim v_1 \sim P$ ולכן P הוא מסלול המילטוני ב- G.