מבחן במודלים חישוביים + פתרון מוצע

סמסטר ב׳ התשס״ט, מועד א׳

תאריך: 12.7.2009

מרצים: ד״ר מירי פרייזלר, פרופ׳ בני שור

מתרגלים: יהונתן ברנט, רני הוד

מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.

- משך הבחינה שעתיים ו־45 דקות.
- חומר עזר מותר: שני דפי A4, כתובים משני הצדדים.
- בראש כל עמוד בטופס המבחן יש למלא מספר ת״ז ומספר מחברת; בטופס התשובות יש למלא מספר ת״ז, **מספר גירסא** ומספר מחברת.
- במבחן שני חלקים. בחלק הראשון שתי שאלות פתוחות (30 נק׳ כל אחת) ובחלק השני 8 שאלות סגורות (5 נק׳ כל אחת). כדי לקבל ציון 100 בבחינה יש לענות נכונה על כל השאלות.
  - תשובות לשאלות הסגורות יש לסמן במקום המתאים לכך בטופס התשובות. בכל שאלה יש לסמן תשובה יחידה.
  - על התשובה לכל שאלה פתוחה להופיע במסגרת המתאימה בטופס המבחן (טופס זה). יש לענות תשובות ברורות ותמציתיות. תשובות מסורבלות או לא ניתנות פיזית לקריאה יזכו לניקוד חלקי בלבד.
  - ודא/י היטב את תשובתך לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורפת מסגרת לשימוש במקרי ״חירום״.
  - מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- על סעיף של שאלה פתוחה ניתן לענות *״איני יודע/ת״* כתשובה; על סעיף זה יינתנו 20% מהנקודות. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתירגול או בתרגיל הבית) בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק. טענות שהוכחו במקום אחר (כגון: בספר הלימוד, בויקיפדיה, ב־MIT, בסמסטר קודם) יש להוכיח מחדש.
- אלא אם נאמר אחרת במפורש, כל המספרים המופיעים בשאלות הם שלמים, אי־שליליים ונתונים בייצוג בינארי.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג ניתן להסתפק בתיאור מילולי *משכנע* של אופן פעולת המכונה. אין צורך להגדיר במדויק את פונקצית המעברים δ אלא אם השאלה מבקשת זאת במפורש.
- בכל השאלות ניתן להניח כי $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ ו־$\mathcal{NP} \neq \text{co-}\mathcal{NP}$ אלא אם השאלה מציינת אחרת.

בהצלחה!

חלק I

שאלה 1

סעיף א׳ (15 נק׳)

נסמן את מחלקת השפות חסרות ההקשר ב־$\mathcal{CFL}$. עבור $\mathcal{C}$ אוסף לא־טריוויאלי של שפות חסרות הקשר (קרי $\varnothing \subsetneq \mathcal{C} \subsetneq \mathcal{CFL}$) נסמן $L_{\mathcal{C}} = \{\langle G\rangle : G \text{ is a context-free grammar and } L(G) \in \mathcal{C}\}$.

הוכח/הוכיחי או הפרך/הפריכי (ע״י דוגמא נגדית מנומקת) את הטענה הבאה:

לכל $\mathcal{C}$ כזה, $L_{\mathcal{C}} \notin \mathcal{R}$.

הוכחה/דוגמא נגדית:

ניקח $\mathcal{C} = \{\varnothing\}$. כעת, $L_{\{\varnothing\}} = \{\langle G\rangle : G \text{ is a context-free grammar and } L(G) = \varnothing\}$ כריעה, כפי שלמדנו בשיעור.
(נחשב את קבוצת כל המשתנים הגוזרים מחרוזת כלשהי של תוים ונבדוק האם המשתנה ההתחלתי S בקבוצה זו).

שאלה 1

סעיף ב' (15 נק')

תהי $L = H_{TM} \cap \overline{A_{TM}}$. האם $L \in \mathcal{R}$? $L \in \mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$? $L \in \text{co-}\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$? $L \notin \mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}$?
הוכח/הוכיחי.

<u>תזכורת</u>: H_{TM} היא בעית העצירה ו־A_{TM} היא בעית הקבלה (לעיתים השתמשנו בסימון U_{TM} לציון שפה זו).

תשובה (יש להקיף בעיגול): $\overline{\mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}}$ / $\text{co-}\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$ / $\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$ / $\mathcal{R}$.

הוכחה:

<u>טענה</u>: $L \in \mathcal{RE}$.
נתאר מ"ט M' המזהה את L. עבור הקלט M, w נריץ את M על w.
- אם M מקבלת את w, M' עוצרת ודוחה את הקלט.
- אם M דוחה את w, M' עוצרת ומקבלת את הקלט.
- אם M לא עוצרת, כמובן ש־M' לא עוצרת (ולפיכך דוחה את הקלט).

<u>טענה</u>: $L \notin \mathcal{R}$.
נראה $H_{TM} \leq_m L$ ע"י רדוקצית המיפוי הבאה. עבור קלט M, w הרדוקציה תבנה את הזוג M', w כאשר M' מריצה את M על w ולאחר מכן דוחה את הקלט (כמובן, אם M עצרה).
לפי הבניה ברור ש־M עוצרת על w אמ"מ M' עוצרת ודוחה את w.

<u>הערה</u>: אפשר גם להראות $A_{TM} \leq_m L \leq_m A_{TM}$ ע"י רדוקציה הפיכה ("סופר רדוקצית מיפוי").

שאלה 2

סעיף א' (15 נק')

הוכח/הוכיחי כי הבעיה הבאה $\mathcal{NP}$־שלמה.

קלט: מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ ואוטומט סופי דטרמיניסטי A מעל הא"ב $\Sigma = \{1, 2, \ldots, n\}$.

שאלה: האם יש מילה $w \in L(A)$ בה מופיעה כל אות של Σ בדיוק פעם אחת?

<u>רמז</u>: אפשר לעשות רדוקציה מבעיית Ham-Path.

הוכחה:

<u>טענה</u>: הבעיה ב־$\mathcal{NP}$.
נתאר מוודא הפועל בזמן פולינומי. המוודא מקבל את הקלט n ו־A ואת העד $w \in \Sigma^*$. הוא בודק שכל אות ב־Σ מופיעה פעם אחת בדיוק ב־w ולאחר מכן מריץ את A על w כדי לבדוק שאכן הגענו למצב מקבל ו־$w \in L(A)$.

<u>טענה</u>: הבעיה היא $\mathcal{NP}$־קשה.
נציג רדוקציה פולינומית מבעיית Hamiltonian-Path לבעיה זו. בהנתן קלט, גרף מכוון $G = (V, E)$ וזוג צמתים בו $s, t \in V$, נגדיר $n = |V|$ ונבנה DFA A מעל הא"ב $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$ כדלקמן.
נמספר את צמתי הגרף מ־0 ועד $n-1$ כאשר $s = 0$ ו־$t = n-1$. קבוצת מצבי האוטומט תהיה $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n, q_\infty\}$ כאשר q_0 המצב ההתחלתי ו־q_n מצב מקבל יחיד.

פונקציית המעברים תיראה כך: לכל קשת $(i, j) \in E$ עבורה $j \neq 0$ נגדיר מעבר $\delta(q_i, j) = q_j$; נוסיף מעבר בודד $\delta(q_{n-1}, n) = q_n$ ונשלים את δ לפונקציה $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ ע"י מעברים מהצורה $\delta(q, i) = q_\infty$ לכל מה שלא הוגדר עד כה.

נשים לב שעל כל קשת הנכנסת למצב q_i (קרי, הצומת i) רשומה האות i ואין קשתות הנכנסות ל־q_0. כמו כן, q_∞ הוא "בור" שלא ניתן לצאת ממנו.

כל מסלול המילטוני $P : s \rightsquigarrow t$ בגרף G ניתן לתרגם למילה w בה מופיעה כל אות מ־Σ פעם אחת בדיוק כך שמסלול החישוב של w ב־A הוא בדיוק P בצירוף q_n. זהו מסלול מקבל ולכן $w \in L(A)$. באופן דומה, עבור מילה $w \in L(A)$ בה מופיעה כל אות מ־Σ פעם אחת בדיוק, מסלול החישוב של w ב־A מתחיל ב־q_0 ומסתיים ב־q_n. מכיוון שהקשת הנכנסת היחידה ל־q_n היא מ־q_{n-1}, כשנסיר את q_n ממסלול זה נקבל מסלול המילטוני $s \rightsquigarrow t$ ב־G.

שאלה 2

סעיף ב׳ (15 נק׳)

האם השפה הבאה ב־$\mathcal{P}$ או שהיא $\mathcal{NP}$־שלמה? הוכח/הוכיחי.

אוסף כל הגרפים הפשוטים הלא־מכוונים $G = (V, E)$ המקיימים את התנאי הבא: קיימים שלושה מעגלים פשוטים, זרים בצמתים בזוגות, המכסים את כל צמתי הגרף.

<u>תזכורת</u>:

- גרף נקרא פשוט אם אין בו לולאות (קרי, קשת מצומת לעצמו) ו/או קשתות מקבילות (קרי, יותר מקשת אחת בין זוג צמתים שונים).
- מעגל נקרא פשוט אם הוא עובר בכל צומת שלו ובכל קשת שלו רק פעם אחת.
- אוסף מעגלים נקרא זר בצמתים בזוגות אם לאף זוג מעגלים מהאוסף אין צומת משותף.

תשובה (יש להקיף בעיגול): $\mathcal{P}$ / $\mathcal{NPC}$

הוכחה:

<u>טענה</u>: השפה ב־$\mathcal{NP}$.
נתאר מוודא הפועל בזמן פולינומי. המוודא מקבל את הקלט $G = (V, E)$ ואת העד C_1, C_2, C_3. הוא בודק שכל C_i מייצג סדרת צמתים המהווה מעגל פשוט ב־G, שאין צומת משותף ל־C_i ו־C_j עבור $i \neq j$ וש־$|C_1| + |C_2| + |C_3| = |V|$.

<u>טענה</u>: השפה היא $\mathcal{NP}$־קשה.
נציג רדוקציה פולינומית מהשפה $\textsc{Undirected-Hamiltonian-Cycle}$ לשפה זו. בהנתן קלט, גרף $G = (V, E)$ לא מכוון, הרדוקציה תחזיר את הגרף $H = G \uplus \Delta \uplus \Delta$, הווה אומר G בתוספת שני עותקים זרים של משולש.
כל כיסוי של H ע״י שלושה מעגלים זרים בצמתים חייב להיות מהצורה הבאה: שני המשולשים ועוד מעגל אחד המכסה את צמתי G (קרי, מעגל המילטון ב־G).

חלק II

1. נתונים וקבועים מראש אוטומט סופי דטרמיניסטי A_0 ומ"ט דטרמיניסטית M_0. נגדיר את השפות הבאות:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\langle M \rangle : M \text{ is a TM and } L(M) = L(A_0)\}, \\ L_2 &= \{\langle A \rangle : A \text{ is a DFA and } L(A) = L(M_0)\}. \end{aligned}$$

איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

(א) שתי השפות, L_1 ו־L_2, כריעות.

(ב) השפה L_1 כריעה אך השפה L_2 אינה כריעה.

(ג) השפה L_2 כריעה אך השפה L_1 אינה כריעה.

(ד) שתי השפות, L_1 ו־L_2, אינן כריעות.

- L_1 אינה כריעה, למשל לפי Rice. אם $L(M_0)$ אינה רגולרית אז $L_2 = \varnothing$ ובוודאי כריעה; אחרת יש להשוות שתי שפות רגולריות וזה כריע.

2. אם $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ נגדיר $L = \{G : G \text{ has a Hamiltonian cycle}\}$ ולעומת זאת אם $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ נגדיר $L = \{G : G \text{ has an isolated vertex}\}$. איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

(א) אם $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ אז L היא ב־$\mathcal{P}$.

(ב) אם $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ אז L אינה ב־$\mathcal{P}$ ואינה $\mathcal{NP}$־שלמה.

(ג) אם $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ אז L היא $\mathcal{NP}$־שלמה.

(ד) התשובות א'-ג' לעיל אינן נכונות.

- כל שפה ב־$\mathcal{P}$ פרט ל־Σ^* ול־$\varnothing$ היא $\mathcal{P}$־שלמה, ואם $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ אז היא כמובן גם $\mathcal{NPC}$.

3. נניח ש־$\text{co-}\mathcal{NP} \neq \mathcal{NP}$. תהיינה $L_1 \in \mathcal{NPC}$, $L_2 \in \text{co-}\mathcal{NPC}$. מה ניתן לומר אודות $L_1 \cup L_2$?

(א) תמיד $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{P}$.

(ב) תמיד $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{NP}$ ולעיתים $L_1 \cup L_2 \notin \mathcal{P}$.

(ג) תמיד $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{NP} \cup \text{co-}\mathcal{NP}$.

(ד) תמיד $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{EXP}$ ולעיתים $L_1 \cup L_2 \notin \mathcal{NP} \cup \text{co-}\mathcal{NP}$.
<u>תזכורת</u>: $\mathcal{EXP} = \bigcup_{k=1}^{\infty} DTIME\left(2^{n^k}\right)$.

- ניקח למשל $L_1 = \textsc{Clique}$, $L_2 = \overline{\textsc{IndSet}}$. קל לראות ש־$L_1 \cup L_2$ היא גם $\mathcal{NP}$־קשה וגם $\text{co-}\mathcal{NP}$־קשה. בהנחת $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, לא ייתכן $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{NP}$ או $L_1 \cup L_2 \in \text{co-}\mathcal{NP}$.

4. מ"ט דטרמיניסטית חד־סרטית M נקראת מכונת Read-only אם אינה כותבת על הסרט, קרי אם כל כניסה $\delta(q,x) = (q', y, \leftarrow / \rightarrow)$ בפונקצית המעברים δ מקיימת $x = y$.
נגדיר את בעית העצירה למכונות Read-only בצורה הבאה: $(\langle M \rangle, x) \in H_{TM}^{RO}$ אמ"מ M היא מכונת Read-only העוצרת על הקלט x. איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

(א) $H_{TM}^{RO} \in \mathcal{R}$.

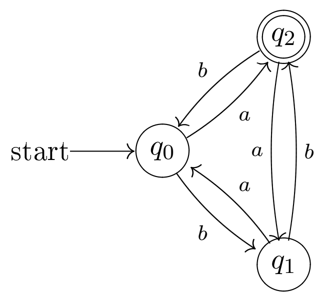
(ב) $H_{TM}^{RO} \in \mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$.

(ג) $H_{TM}^{RO} \in \text{co-}\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$.

(ד) $H_{TM}^{RO} \notin \mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}$.

- מכונת Read-only שאינה עוצרת על הקלט x תוך $|x| + |Q|$ צעדים, לא תעצור עליו כלל.

5. להלן דיאגרמת מצבים של אוטומט סופי דטרמיניסטי A מעל הא"ב $\Sigma = \{a, b\}$:



מהו מספר מחלקות השקילות של $L(A)^R$?
(תזכורת: $L^R = \{x^R : x \in L\}$ כאשר x^R מסמן את המחרוזת x רשומה מהסוף להתחלה)

(א) לא סופי.

(ב) 1.

(ג) 2.

(ד) 3.

- ה־DFA המצומצם המקבל את $L(A)^R$ נראה דומה ביותר ל־A(הופכים כיווני קשתות ומחליפים את המצב ההתחלתי והמצב המקבל) ובעל שלושה מצבים.

6. תהי $\mathcal{C}_1$ מחלקת השפות שהן גם $\mathcal{RE}$־שלמות וגם co-$\mathcal{RE}$־שלמות ותהי $\mathcal{C}_2$ מחלקת השפות שהן גם $\mathcal{NP}$־שלמות וגם co-$\mathcal{NP}$־שלמות. איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

(א) $\mathcal{C}_1 \subsetneq \mathcal{C}_2$ ללא תלות בשאלה $\mathcal{NP} \overset{?}{=} \text{co-}\mathcal{NP}$.

(ב) $\mathcal{C}_1 \supsetneq \mathcal{C}_2$ ללא תלות בשאלה $\mathcal{NP} \overset{?}{=} \text{co-}\mathcal{NP}$.

(ג) אם $\mathcal{NP} = \text{co-}\mathcal{NP}$ אז $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$.

(ד) אם $\mathcal{NP} \neq \text{co-}\mathcal{NP}$ אז $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$.

- תמיד $\mathcal{C}_1 = \varnothing$ כי $\mathcal{RE} \neq \text{co-}\mathcal{RE}$; מתקיים $\mathcal{C}_2 = \varnothing$ אמ"מ $\mathcal{NP} \neq \text{co-}\mathcal{NP}$.

7. רדוקצית מיפוי משפה A לשפה B נקראת *סופר רדוקצית מיפוי* אם היא פונקציה חח"ע ועל (כפונקציה $\Sigma^* \to \Sigma^*$). נניח שקיימת סופר רדוקצית מיפוי מ־A ל־B. איזו מהאפשרויות הבאות <u>אינה</u> מתקיימת?

   (א) אם $B \notin \mathcal{RE}$ אז בהכרח $A \notin \mathcal{R}$.

   (ב) אם $B \notin \mathcal{R}$ אז בהכרח $A \notin \mathcal{R}$.

   (ג) אם $B \in \mathcal{RE}$ אז בהכרח $A \in \mathcal{R}$.

   (ד) אם $B \in \mathcal{R}$ אז בהכרח $A \in \mathcal{R}$.

   - כיוון שסופר רדוקצית מיפוי היא הפיכה, מתקיימים גם $A \leq_m B$ וגם $B \leq_m A$.

8. נתונה שפה אונרית סופית L וידוע שהמילה הארוכה ביותר בה היא 1^k. תהי $A = L^5$, קרי, L משורשרת חמש פעמים לעצמה. נסמן ב־$n(A)$ את מספר מחלקות השקילות ביחס השקילות $\sim_A$ המוגדר בקבוצה Σ^* ע"י השפה A. איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?
<u>הערה</u>: בשאלה זו נפלו זוג טעויות: במקום $5k+1$ היה צריך להיות רשום $5k+2$ וכן יש להניח כי $k \geq 5$. הפתרון להלן מתייחס לשאלה המתוקנת.

   (א) תמיד $n(A) \leq k+1$.

   (ב) תמיד $n(A) \leq 5k+2$ ויש שפה L עבורה $n(A) > k+1$.

   (ג) תמיד $n(A) \leq 2^k$ ויש שפה L עבורה $n(A) > 5k+2$.

   (ד) יש שפה L עבורה $n(A) > 2^k$.

   - השפה A סופית, אונרית ומכילה מילים באורך לכל היותר $5k$. לכן קיים DFA עם $5k+2$ מצבים המקבל אותה ומכאן ש־$n(A) \leq 5k+2$; עבור $L = \{1^k\}$ נקבל $A = \{1^{5k}\}$ ומתקיים $n(A) = 5k+2 > k+1$. תשובה ד' נפסלת כיוון שעבור $k \geq 5$ מתקיים $5k+2 \leq 2^k$.