

סהב	3	2	1

מבחן מועד ב' במודלים חישוביים, סמסטר ב' תשע"ב (2012)

בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' ישי מנצור, ד"ר יפתח הייטנר

מתרגלים: מריאנו שיין, אורי להב

14/08/12

הוראות

1. מומלץ לקרא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
2. משך הבחינה – שלוש שעות. לא תינתן כל הארכה נוספת.
3. חומר עזר מותר: שני דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד עם שם התלמיד/ה.
4. **יש לענות על השאלות הסגורות בטופס התשובות ועל השאלות הפתוחות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה).** מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיטה בלבד.
5. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.
יש למלא בטופס התשובות שם, מספר ת.ז. ומספר גרסה.
6. במבחן 10 שאלות סגורות ו-2 שאלות פתוחות.
א. בנוגע לשאלות הסגורות:
- הניקוד לכל שאלה הינו 6 נקודות. תשובה שגויה לא תזכה לנקודות.
- לכל שאלה יש לסמן תשובה אחת בטופס התשובות המצורף.
- יש לזכור למלא שם, ת.ז. ומספר גרסה בטופס התשובות המצורף.
ב. בנוגע לשאלות הפתוחות:
- הניקוד לכל שאלה הינו 20 נקודות.
- יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון.
- יש לענות תשובות ברורות ענייניות ותמציתיות.
7. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתרגול, או בתרגיל בית) בתנאי שמצטטים אותה במדויק. טענות אחרות (כאלה שהוכחו בספר, בהרצאות מהסמסטר הקודם, וכו') יש להוכיח.

בהצלחה!

מספר הגרסה שלך הוא: 1

סמן זאת כרגע בטופס התשובות!

חלק א: שאלות סגורות

שאלה 1

טענה א: אין שפה L שאינה ב- R , אך L וגם \bar{L} הם ב- $co-RE$.
טענה ב: לכל מספר טבעי n קיימת שפה סופית L_n שאינה ניתנת להכרעה.

- א. טענה א נכונה וטענה ב שגויה.
- ב. טענה ב נכונה וטענה א שגויה.
- ג. טענה א נכונה וטענה ב נכונה.
- ד. טענה א שגויה וטענה ב שגויה.

טענה א: אם המשלים של L ב- $coRE$, אז L ב- RE . אם בנוסף L ב- $coRE$, אז L ב- R .
טענה ב: כל שפה סופית היא רגולרית, וניתנת להכרעה.

שאלה 2

טענה א: לכל זוג שפות L ו- C : אם L רגולרית ו- $L \cap C$ כריעה אז C כריעה.
טענה ב: לכל זוג שפות L ו- C : אם L רגולרית ו- $L \cap C$ חסרת-הקשר אז C חסרת-הקשר.

- א. טענה א נכונה וטענה ב שגויה.
- ב. טענה ב נכונה וטענה א שגויה.
- ג. טענה א נכונה וטענה ב נכונה.
- ד. טענה א שגויה וטענה ב שגויה.

קל לקבל דוגמאות נגדיות עבור $L =$ השפה הריקה.

שאלה 3

שפה חסרת הקשר L מתקבלת מדקדוק חסר הקשר עם משתנים $\{B, A, S\}$, משתנה התחלתי S , וחוקי הגזירה הבאים:

$$S \rightarrow AS \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow 0B$$

$$B \rightarrow 0B \mid 1B \mid \varepsilon$$

שפה רגולרית R מתקבלת ע"י האוטומט האי-דטרמיניסטי $(\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_0\})$ כאשר δ מוגדרת כך:

$$\delta(q_1, 1) = \{q_1\} \quad \delta(q_0, 0) = \{q_1\} \quad \delta(q_0, 1) = \emptyset \quad \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\}$$

- א. L מוכלת ממש ב R .
- ב. R מוכלת ממש ב L .
- ג. $R=L$.
- ד. טענות א', ב' ו-ג' אינן נכונות.

L היא שפת כל המילים שלא מתחילות ב-1.

R כוללת רק מילים שלא מתחילות ב-1, אך לא כוללת את המילה 0.

שאלה 4

נתונות ארבע שפות A, B, C ו-D וידועים הפרטים הבאים:

1. ישנה רדוקציה מיפוי פולינומיאלית מ-A ל-B
2. ישנה רדוקציה מיפוי פולינומיאלית מ-B ל-C
3. ישנה רדוקציה מיפוי פולינומיאלית מ-D ל-C

טענה א: אם A היא NP-complete אז C היא NP-complete.
טענה ב: אם C כריעה אז המשלים של D כריעה.

- א. טענה א תמיד נכונה וטענה ב לפעמים שגויה.
- ב. טענה ב תמיד נכונה וטענה א לפעמים שגויה.
- ג. טענה א תמיד נכונה וטענה ב תמיד נכונה.
- ד. טענה א לפעמים שגויה וטענה ב לפעמים שגויה.

טענה א: כדוגמא נגדית אפשר לקחת $C=A_{TM}$ ו- $A=B=3SAT$

טענה ב: אם C כריעה, אז D כריעה (בגלל קיום הרדוקציה), ולכן המשלים של D כריעה.

שאלה 5

$\left\{ \langle M \rangle \mid M \text{ is a TM that in the computation of } M(\varepsilon) \text{ the head never moves three times in a row left} \right\}$

לאיזו מחלקה שייכת שפה זו?

- א. R.
- ב. $RE \setminus R$.
- ג. $coRE \setminus R$.
- ד. תשובות א', ב' ו-ג' אינן נכונות.

ב- $coRE$ כי ניתן לדמות את ריצת M על המילה הריקה ולקבל כאשר מזהים שהראש של M נע שלוש פעמים ברציפות שמאלה (כך נקבל את השפה המשלימה).

לא ב-R ע"י רדוקציה מיפוי מבעיית הקבלה: בהינתן M ו-w, הרדוקציה תבנה מכונה M' עם תפקוד זהה ל-M, רק שלאחר כל שני צעדים רצופים שמאלה, הראש ינוע ימינה ושמאלה (ללא שינוי הסרט). כמו כן, כאשר M נכנסת למצב מקבל, המכונה M' תנוע תחילה שלושה צעדים שמאלה ואז תקבל.

שאלה 6

$REPEATS - CONFIGURATION = \left\{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ is a TM that enters some configuration more than once in processing input } w \right\}$

לאיזו מחלקה שייכת שפה זו?

- א. R.
- ב. $RE \setminus R$.
- ג. $coRE \setminus R$.
- ד. תשובות א', ב' ו-ג' אינן נכונות.

ב- RE כי ניתן לדמות את ריצת M תוך כתיבת ההיסטוריה החישובית על הסרט, ולקבל כאשר מזהים קונפיגורציה שכבר הייתה בעבר (כך נקבל את השפה).

לא ב-R ע"י רדוקציה מיפוי מבעיית הקבלה: בהינתן M ו-w, הרדוקציה מחזירה מ"ט M' שמדמה את ריצת M על w תוך כתיבת מספר הצעד הנוכחי בריצת M בתחילת הסרט. כמו כן, כאשר M נכנסת למצב מקבל M' מוחקת את כל הסרט ונכנסת ללולאה אינסופית שעוברת באותה קונפיגורציה פעמיים.

שאלה 7

ניח $co-NP \neq NP$.

נגדיר מחלקת שפות $all-NP$ באופן הבא:

שפה L ב $all-NP$ אם L קיימת מ"ט אי-דטרמיניסטית M כך ש:

1. M פולינומיאלית (קיים פולינום p כך שלכל קלט w , זמן הריצה של M על w הוא $O(p(|w|))$).
2. לכל $w \in L$, M מסתיימת במצב מקבל.
3. לכל $w \notin L$, M מסתיימת במצב דוחה.

א. אם $L \in all-NP$ אזי $\bar{L} \in all-NP$.

ב. אם $L \in all-NP$ אזי $L \in all-NP$.

ג. ישנה שפה $L \in all-NP$ כך שגם $L \in all-NP$ וגם $\bar{L} \in all-NP$.

ד. $all-NP = NP$.

אם $L \in all-NP$, אז יש מכונה א"ד שמקבלת את L . נחליף את מצבי הקבלה והדחייה ונקבל מכונה שמקיימת את הדרישות הנל עבור המשלים של L .

שאלה 8

דקדוק חסר הקשר מיוחד הוא דקדוק חסר הקשר בו לא קיים משתנה A שניתן לגזור ממנו מחרוזת שמכילה את A (כלומר, לא ניתן לגזור מ- A מחרוזת $\beta A \alpha$ במספר סופי של צעדי גזירה, כאשר β, α הן מחרוזות כלשהן המורכבות ממשתנים וטרמינלים). L היא שפה שמתקבלת ע"י דקדוק חסר הקשר מיוחד.

מהי המחלקה הקטנה ביותר (ביחס להכלה) אליה שייכת L ?

א. שפות רגולריות.

ב. שפות סופיות.

ג. שפות חסרות הקשר.

ד. תשובות א', ב' ו-ג' אינן נכונות.

בדקדוק חסר הקשר מיוחד יש מספר עצי גזירה סופי (החל מהמשתנה ההתחלתי), שכן עומקו של כל ענף חסום ע"י מספר המשתנים בדקדוק $+1$.

שאלה 9

ניזכר כי $DTIME(t(n))$ היא קבוצת כל השפות הניתנות להכרעה ע"י מ"ט דטרמיניסטית (חד סרטית) הרצה בזמן $O(t(n))$. בהנחה כי קיימת מ"ט אוניברסלית T לסמלויץ "חסר הפסד": T מקבלת כקלט (קידוד של) מכונה M , מחרוזת w ומספר t , מריצה את M על w למשך t צעדים, ומחזירה את המצב בו M לאחר t הצעדים. זמן הריצה של T על קלט $\langle M, w, t \rangle$ הוא $O(|M| \cdot t)$.
מבין הטענות הנכונות סמן את החזקה ביותר (זאת שלא נגררת ע"י טענה נכונה אחרת):

- $DTIME(n^2)$ מכילה ממש את $DTIME(n^2/2)$
- $DTIME(n^2)$ מכילה ממש את $DTIME(n^2/\sqrt{\log n})$
- $DTIME(n^2)$ מכילה ממש את $DTIME(n^2/\log n)$
- $DTIME(n^2)$ מכילה את $DTIME(n^2 * \log n)$

ברור כי טענות א ו ד אינן נכונות, וממשפט ה Time-Hierarchy נובע כי טענה ג' נכונה. נראה כי טענה ב' גם נכונה, ובהיותה "חזקה יותר" מ ב', היא התשובה המבוקשת.

יהי D המופע של האלגוריתם מהרצאה 13, שקף 5, ביחס לפונקציה $t(n) = n^2$. הניחו כי D בצעד 4 מסמלץ את M על w בעזרת מ"ט T , שאת קיומה הנחנו בשאלה, למשך $|M|/n^2$ צעדי סימולציה (ולא למשך $MAX=n/\log n$ צעדים, ככתוב בשקף).

מההנחה על T נובע כי $L(D)$ שייכת ל $DTIME(n^2)$, ובדומה למה שהוכחנו בכיתה, ניתן להראות כי $L(D)$ לא שייכת ל $DTIME(o(n^2))$ — עבור כל M ב $DTIME(o(n^2))$, קיים k גדול מספיק כך ש D עונה הפוך מ M על $w = M10^k$ ובפרט לא ל $DTIME(n^2/\sqrt{\log n})$

שאלה 10

נתונות שפות A ו- B שאינן כריעות. אלו מהשפות הבאות הן בהכרח לא כריעות?

- $A \cup B$
- $AB \cup BA$
- תשובות א' ו-ב' נכונות.
- תשובות א' ו-ב' אינן נכונות.

דוגמא נגדית ל-א: שפה לא כריעה והמשלים שלה.
דוגמא נגדית ל-ב: שפה לא כריעה והמשלים שלה, בתוספת המילה הריקה לזו מהשתיים בה אינה נמצאת.

חלק ב: שאלות פתוחות

שאלה 1

בעיית הכרעה XS היא הבעיה הבאה:

קלט: n מספרים שלמים x_1, \dots, x_n

שאלה: האם קיימת תת-קבוצה S של $\{1, \dots, n\}$ כך שמתקיים:

$$\sum_{i \in S} x_i + |\bar{S}| = \sum_{i \notin S} x_i + |S|$$

הוכח ש-XS היא NP-complete.

הרדוקציה הפשוטה היא מ-PARTITION

היא מבוססת על השקילות של הדרישה הנ"ל לזהות:

$$\sum_{i \in S} (x_i - 1) = \sum_{i \notin S} (x_i - 1)$$

מכאן שעבור הרדוקציה יש להוסיף לכל מספר +1

פורמלית: בהינתן y_1, \dots, y_n (קלט ל-PARTITION)

נוציא $x_i = y_i + 1$ (קלט ל-XS)

שאלה 2

נתונות שתי שפות הבאות

$$GT = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1 \text{ and } M_2 \text{ are TMs and } |L(M_1) \cap L(M_2)| > 2012 \}$$

$$EQ = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1 \text{ and } M_2 \text{ are TMs and } |L(M_1) \cap L(M_2)| = 2012 \}$$

אחת משתי השפות היא ב- R.E. ואחת אינה ב- R.E.

א. השפה שהיא ב- R.E. היא _____ GT

הוכחה:

פתרון ע"י מכונה לא דטרמיניסטית:

ננחש 2013 קלטים w_1, \dots, w_{2013}

נריץ את M_1 ו- M_2 על הקלטים אחד אחרי השני, ונקבל אם כל המילים מתקבלות ע"י שתי המכונות

פתרון ע"י מכונה דטרמיניסטית:

לכל k גדול מ-1:

1. נריץ את M_1 ו- M_2 על k הקלטים הראשונים באלפבית (בסדר לקסיקוגרפי) למשך k צעדים (על כל קלט)

2. אם ישנם 2013 קלטים שונים ששתי המכונות קבלו, נעצור ונקבל

3. אחרת נמשיך לפאזה $k+1$

תעודת זהות:

מספר מחברת:

ב. השפה שאינה ב- R.E. היא EQ

הוכחה:

ע"י רדוקציית מיפוי מהמשלים של H.TM.

בהינתן M ו-w הרדוקציה מחזירה זוג מכונות זהות הפעולות כך:

אם הקלט בין 1 ל-2012 (בקידוד המתאים לא"ב המכונה) – מקבלים.

אחרת, מריצים את M על w ורק כאשר הריצה הסתיימה – מקבלים.